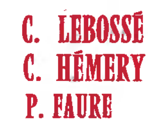
ALGÈBRE et Statistique



1re B

FERNAND NATHAN

ALGÈBRE
ET
STATISTIQUE

C. LEBOSSÉ
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Claude-Bernard

C. HÉMERY
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Lavoisier

P. FAURE
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Raspail

ALGÈBRE ET STATISTIQUE

Classe de Première B

PROGRAMME 1966

FERNAND NATHAN ÉDITEUR
18, rue Monsieur-le-Prince, PARIS VIe

178 351

COLLECTION LEBOSSÉ ET HÉMERY

avec la collaboration de P. FAURE

Premier Cycle

6e	Arithmétique et Travaux Pratiques
5e	Arithmétique et Géométrie
4e	Arithmétique, Algèbre et Géométrie
3e	Algèbre, Arithmétique et Géométrie

Deuxième Cycle

2e A	Algèbre et Géométrie
2e C	Algèbre
2e C	Géométrie
1re A	Algèbre et notions d'Analyse
	Éléments de Statistique
1re B	Algèbre et Statistique
1re C et D	Algèbre et notions d'Analyse
1re C	Géométrie et Géométrie analytique
1re D	Géométrie et Statistique
Terminale A	Notions d'Analyse et de Probabilités
Terminale B	Algèbre et Probabilités
Terminales C, D et E	Algèbre et Analyse
Terminale C	Géométrie et Géométrie analytique
Terminale D	Géométrie et éléments de Probabilités

Enseignement technique
LEBOSSÉ-HÉMERY-FAURE

2e Techn. industrielle	Algèbre
2e Techn. industrielle	Géométrie
1re Techn. industrielle	Algèbre, Trigonométrie, Géométrie
Classes Terminales	Mathématiques *(1 vol.)*

EXTRAITS DES PROGRAMMES DU 8 JUIN 1966

(B.O. nº 26 du 30-6-66)

CLASSE DE PREMIÈRE B

Quatre heures et demie hebdomadaires

NOTIONS GÉNÉRALES

Un certain nombre des notions qui suivent auront été, bien entendu, dégagées peu à peu au cours des années précédentes; la présente énumération fixe le bilan de ce qui doit être définitivement acquis à la fin de l'année de Première B.

Ensembles; sous-ensemble, ensemble vide; inclusion, intersection, réunion; sous-ensembles complémentaires; algèbre des parties d'un ensemble fini. Produit cartésien de deux ensembles.

Relation binaire entre éléments de deux ensembles; relation d'équivalence entre éléments d'un ensemble, classes d'équivalence. Relation d'ordre entre éléments d'un ensemble.

Application d'un ensemble dans un ensemble; application injective, surjective; application bijective application réciproque; composition de deux applications.

Vocabulaire de la logique; implication, équivalence logique, réciproque. Signification des quantificateurs « quel que soit » et « il existe ».

ALGÈBRE ET NOTIONS D'ANALYSE

I. — Polynôme et équation du second degré.

Équation générale du second degré à une inconnue; existence et calcul des racines. Somme et produit des racines; recherche de deux nombres ayant pour somme et pour produit deux nombres donnés.

Étude du signe du polynôme du second degré. Application à la résolution de l'inéquation du second degré à coefficients numériques; détermination de la position d'un nombre par rapport aux racines d'une équation du second degré.

II. — Dérivée d'une fonction et application au sens de la variation d'une fonction.

Aucune difficulté ne sera soulevée au sujet de la notion de limite; on se bornera à donner les définitions indispensables, ainsi que l'énoncé des propriétés utilisées; la démonstration de ces propriétés est totalement en dehors du programme.

Définition de la tangente en un point d'une courbe. Calcul de son coefficient directeur; cas du repère orthonormé.

Définition de la dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable, de la fonction dérivée d'une fonction.

Dérivée d'une fonction constante, d'une somme de fonctions dérivables, du produit et du quotient de deux fonctions dérivables; dérivée d'un polynôme et d'une fonction rationnelle.

Équation de la tangente en un point d'une courbe.

Énoncé, sans démonstration, du théorème permettant de déduire le sens de variation d'une fonction sur un intervalle du signe de sa dérivée.

Étude (sur des exemples numériques) des seules fonctions définies par :

$$y = ax^2 + bx + c; \quad y = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad y = x^3 + px + q; \quad y = ax^4 + bx^2 + c$$

Les représentations graphiques seront tracées dans un repère orthogonal normé ou non.

III. — Produit scalaire.

Multiplication scalaire de deux vecteurs; définition, commutativité, distributivité par rapport à l'addition vectorielle. Carré scalaire de la somme ou de la différence de deux vecteurs.

Relation : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$ dans un triangle.

IV. — Fonctions circulaires.

1° Extension de la notion d'arc de cercle. Arc orienté, sa mesure algébrique sur un cercle orienté.

Extension de la notion d'angle de deux demi-droites (ou de deux vecteurs) dans un plan. Angle orienté de deux demi-droites, sa mesure algébrique dans un plan orienté.

Formule de Chasles pour les arcs de cercle orientés et pour les angles orientés de deux demi-droites. Arcs (ou angles) opposés, supplémentaires, complémentaires.

Cercle trigonométrique. Sinus, cosinus, tangente, cotangente d'un arc (ou d'un angle de demi-droites) orienté.

2° Fonctions circulaires sin x, cos x, tg x, cotg x de la variable numérique x; définition, existence, périodicité.

Relations entre sin x, cos x, tg x, cotg x. Relations entre les fonctions circulaires de :

$$x, \qquad -x, \qquad \pi \pm x, \qquad \frac{\pi}{2} \pm x.$$

Équations : $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

Démonstration des formules classiques d'addition relatives à :

$$\cos(a \pm b), \qquad \sin(a \pm b), \qquad \operatorname{tg}(a \pm b).$$

Expressions de $\sin 2a$, $\cos 2a$ en fonction de sin a et cos a.

Transformation en produit de la somme ou de la différence de deux sinus ou de deux cosinus et transformation inverse.

Sens de variation des fonctions circulaires sin x, cos x, tg x.

Dérivées de ces fonctions. Leur représentation graphique (repère orthogonal).

V. — Notions succinctes de Géométrie analytique plane.

1° Équation d'une droite relativement à un repère cartésien donné. Détermination de l'équation d'une droite définie par deux points, ou par un point et sa direction.

Intersection de deux droites définies par leurs équations; parallélisme.

(L'étude des représentations paramétriques de droites est en dehors du programme.)

2° Plan rapporté à un repère orthonormé. Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs du plan.

Distance de deux points. Cosinus de l'angle de deux vecteurs; condition d'orthogonalité de deux vecteurs.

Coordonnées d'un vecteur normal à une droite, distance d'un point à une droite; condition d'orthogonalité de deux droites.

Équation du cercle défini soit par son centre et son rayon, soit par deux points diamétralement opposés.

VI. — Mathématiques appliquées.

1° Progressions arithmétiques. Progressions géométriques. Applications : intérêts composés et annuités.

2° *Calcul numérique.* Usage des tables numériques (en particulier tables de carrés, cubes, etc., tables des valeurs naturelles des rapports trigonométriques, tables financières). Pratique de l'interpolation.

Usage des tables de logarithmes décimaux, des échelles logarithmiques, de la règle à calcul.

Les questions énumérées au paragraphe VI,2° ne donneront lieu à aucun développement théorique. Les élèves seront régulièrement entraînés à la pratique du calcul numérique ou graphique.

INITIATION A LA STATISTIQUE

1° *Séries statistiques.*

Présentation des documents statistiques; observation, enregistrement et groupement des données. Tableaux numériques. Diverses représentations graphiques. Polygone et courbe de fréquence, courbe cumulative.

Éléments caractéristiques d'une série statistique. Médiane, moyennes, dominante. Évaluation de la dispersion : quantiles, écart moyen arithmétique, fluctuation, écart type.

2° *Les indices de la vie économique.*

Indices simples, synthétiques. Confection, utilisation. Indices usuels.

3° *Ajustement linéaire.*

Méthode graphique, méthode des moyennes discontinues, méthodes des moindres carrés.

4° *Séries chronologiques.*

Les composantes fondamentales du mouvement d'ensemble : mouvement de longue durée, mouvement cyclique, variations saisonnières (divers procédés d'élimination), variations accidentelles.

5° *Notions sur la corrélation.*

Définition. Droite de régression, covariance, coefficient de corrélation linéaire.

ALGÈBRE ET NOTIONS D'ANALYSE

Première Leçon

VOCABULAIRE ET SYMBOLES

1. Implication. — Lorsqu'une propriété $\mathcal{A}$ (hypothèse) admet pour conséquence la propriété $\mathcal{B}$ (conclusion), on dit que la propriété $\mathcal{A}$ *implique* ou entraîne la propriété $\mathcal{B}$. On écrit :

$$\boxed{\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}} \qquad \text{lire " } \mathcal{A} \textit{ implique } \mathcal{B} \text{ "}$$

L'énoncé d'un théorème exprime que l'hypothèse $\mathcal{A}$ implique la conclusion $\mathcal{B}$.

EXEMPLE. — Si une droite Δ est perpendiculaire à un plan P, elle est orthogonale à toute droite D située dans le plan P.

On écrit : $\quad \Delta \perp P \Longrightarrow \Delta \perp D$

2. Équivalence logique. — Si les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont telles que $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ et que réciproquement $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$, ces deux propriétés sont dites équivalentes. On écrit :

$$\boxed{\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}} \qquad \text{lire " } \mathcal{A} \textit{ équivaut à } \mathcal{B} \text{ "}$$

Cette équivalence logique symbolise une condition nécessaire et suffisante :

$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$: Pour que $\mathcal{B}$ soit vérifiée il suffit que $\mathcal{A}$ le soit.

$\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$: Pour que $\mathcal{B}$ soit vérifiée il est nécessaire que $\mathcal{A}$ le soit.

EXEMPLE. — Si A, B, C, D sont quatre points d'un cercle de centre O, l'égalité des cordes AB et CD implique celle des angles au centre AOB et COD et réciproquement :

$$AB = CD \Longleftrightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD}$$

ce qui entraîne visiblement :

$$AB \neq CD \Longleftrightarrow \widehat{AOB} \neq \widehat{COD}.$$

L'équivalence de deux propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ entraîne l'équivalence des propriétés contraires $\overline{\mathcal{A}}$ et $\overline{\mathcal{B}}$. Donc :

$$\boxed{\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\overline{\mathcal{A}} \Longleftrightarrow \overline{\mathcal{B}}}$$

3. Principe de réciprocité. — 1° ***Si deux implications contraires l'une de l'autre sont vraies, il en est de même des implications réciproques.***

Supposons que $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ et $\overline{\mathcal{A}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{B}}$. La propriété $\mathcal{B}$ ne saurait résulter de $\overline{\mathcal{A}}$ qui

entraîne $\overline{\mathcal{B}}$ en contradiction avec $\mathcal{B}$. Donc, l'existence de $\mathcal{B}$ implique celle de $\mathcal{A}$. De même $\overline{\mathcal{B}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{A}}$. Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} \text{ et } \overline{\mathcal{A}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{B}}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B} \text{ et } \overline{\mathcal{A}} \Longleftrightarrow \overline{\mathcal{B}}}$$

2° ***Si, dans des conditions données, les seules hypothèses distinctes possibles $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ entraînent respectivement des conclusions distinctes $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ elles entraînent : $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A}' \Longleftrightarrow \mathcal{B}'$ et $\mathcal{A}'' \Longleftrightarrow \mathcal{B}''$.***

En effet, si $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A}' \Longrightarrow \mathcal{B}'$ et $\mathcal{A}'' \Longrightarrow \mathcal{B}''$, la propriété $\mathcal{B}$ ne saurait résulter de $\mathcal{A}'$ ou $\mathcal{A}''$ dont la réunion est le contraire de $\mathcal{A}$. Donc, $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$ et par suite :

$$\boxed{\begin{matrix} \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} \\ \mathcal{A}' \Longrightarrow \mathcal{B}' \\ \mathcal{A}'' \Longrightarrow \mathcal{B}'' \end{matrix}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} \mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B} \\ \mathcal{A}' \Longleftrightarrow \mathcal{B}' \\ \mathcal{A}'' \Longleftrightarrow \mathcal{B}'' \end{matrix}}$$

Ainsi, dans un triangle ABC d'angles A, B, C et de côtés a, b, c on peut démontrer aisément que : $A = B \Longrightarrow a = b$ et $A > B \Longrightarrow a > b$ donc que : $A < B \Longrightarrow a < b$.

On en déduit par réciprocité que :

$$A = B \Longleftrightarrow a = b, \quad A > B \Longleftrightarrow a > b \quad \text{et} \quad A < B \Longleftrightarrow a < b.$$

On évite ainsi la démonstration directe de l'implication $a > b \Longrightarrow A > B$ qui n'est pas immédiate.

4. Quantificateurs. — Ce sont des abréviations d'usage courant :

1° ***Le quantificateur universel $\forall$ se lit : " Pour tout " ou " Quel que soit ".***

Dans tout triangle ABC, la somme des trois angles A, B, C est égale à deux droits s'écrit en abrégé : $\forall$ triangle ABC : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2^D$.

On lit : Pour tout triangle ABC (ou quel que soit le triangle ABC), la somme des angles $A + B + C$ est égale à deux droits.

2° ***Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit : " Il existe "*** et $\exists$ suivi de : se lit « il existe, ... tel que ».

Quel que soit le nombre relatif non nul a, il existe un nombre relatif x tel que $ax = -5$. On écrit : $\forall a \neq 0, \exists x : ax = -5$.

On emploie aussi le symbole $\nexists$ (il n'existe pas) et le symbole $\exists$? (Existe-t-il ?).

$$\nexists x : 0.x = -5; \qquad \exists ?\, x : 2x^2 - 4x + 5 = 0.$$

NOTIONS SUR LES ENSEMBLES

5. Définition. — ***On désigne sous le nom d'ensemble toute collection d'éléments distincts rassemblés par une propriété commune.***

On peut ainsi envisager l'ensemble des lettres de l'alphabet, l'ensemble des points d'un plan, l'ensemble des directions de l'espace, l'ensemble des quadrilatères, etc.

On désigne par N l'ensemble des nombres entiers arithmétiques :

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \}$$

par Z l'ensemble des entiers relatifs, par Q l'ensemble des nombres rationnels relatifs et enfin par R l'ensemble des nombres réels ou relatifs rationnels et irrationnels.

Un ensemble est fini lorsqu'il ne contient qu'un nombre déterminé d'éléments.

$\{ a, b, c, d \}$ symbolise l'ensemble fini formé par les quatre lettres a, b, c, d : chacune d'elles est un élément de cet ensemble. Si un ensemble ne contient qu'un seul élément a on le désigne par $\{ a \}$.

Un ensemble est infini ou illimité lorsqu'il contient un nombre illimité d'éléments. Pour désigner l'ensemble des quadrilatères, on écrira : { quadrilatères }.

6. Appartenance. — Lorsque a est un élément de l'ensemble E, on écrit :

$$\boxed{a \in E}$$

ce qui se lit : " *a appartient à* E " ou " *a est un élément de* E " (fig. 1).

Si b n'est pas un élément de l'ensemble E on écrit de même :

$\boxed{b \notin E}$ lire " *b n'appartient par à* E "

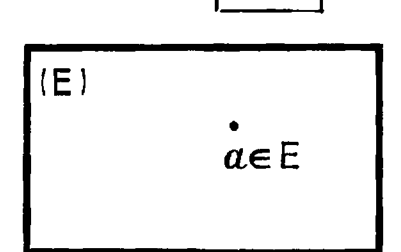


Fig. 1.

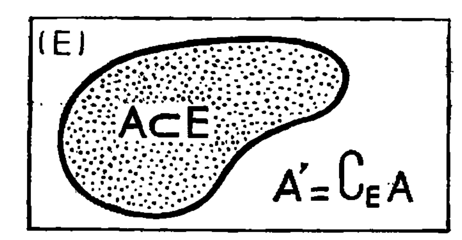


Fig. 2.

Exemples. — 1° Ainsi on a :

$$7 \in N \quad \text{et} \quad \sqrt{3} \in R, \text{ mais } \quad \sqrt{3} \notin Q.$$

2° Désignons par E l'ensemble des cartes d'un jeu de 32 cartes, par a le roi de cœur et par b le cinq de pique : $a \in E$ et $b \notin E$

Lorsqu'un ensemble ne contient aucun élément on dit que cet ensemble est *vide*. On le symbolise par $\varnothing$.

Ainsi l'ensemble E des droites Δ de l'espace parallèles à deux droites concourantes D_1 et D_2, est l'ensemble vide : $E = \varnothing$.

Lorsque a et b désignent un même élément d'un ensemble E on dit que a et b *coïncident* et on écrit : $a = b$ (a égale b).

Dans le cas contraire on écrit : $a \neq b$ (a différent de b).

Si deux ensembles A et B sont formés des mêmes éléments, c'est-à-dire si tout élément de chacun d'eux appartient à l'autre, ces deux ensembles sont dits *identiques*.

On écrit : $A = B$

7. Sous-ensembles. — Inclusion. — *Tout ensemble* A *composé d'éléments appartenant à l'ensemble* E *constitue un sous-ensemble de* E.

On dit alors que l'ensemble A est inclus dans E. Parmi les sous-ensembles de E figure E lui-même. Si A est un sous-ensemble de E, autre que E, on écrit :

$A \subset E$ A *est strictement inclus dans* E.

On a alors affaire à une inclusion au sens strict (fig. 2). Ainsi pour les ensembles de nombres, on peut écrire :

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Si A peut être E lui-même on écrit :

$A \subseteq E$ On a affaire à une inclusion au sens large.

***L'ensemble* A' *des éléments de* E *qui n'appartiennent pas au sous-ensemble* A *est l'ensemble complémentaire de* A *dans* E.**

On écrit : $A' = \complement_E A$ (A' complément de A dans E)

ou parfois : $A' = E - A$ (A' égale E amputé de A).

Notons que : 1° $\complement_E E = \varnothing$.

2° $A \subseteq B,\ B \subseteq A \Longrightarrow A = B$.

3° $A \subseteq B,\ B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

8. Intersection de deux ensembles. — ***On appelle intersection de deux ensembles* A *et* B, *l'ensemble* I *constitué par les éléments communs à* A *et* B** (fig. 3).

On écrit : $I = A \cap B$ et on lit " A *inter* B "

Donc : $x \in I \Longleftrightarrow x \in A$ et $x \in B$.

Ainsi : { carrés } = { rectangles } $\cap$ { losanges }.

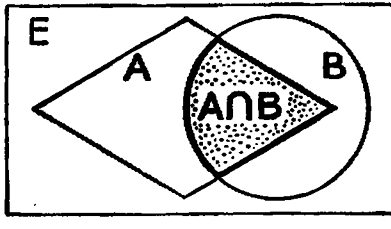


Fig. 3.

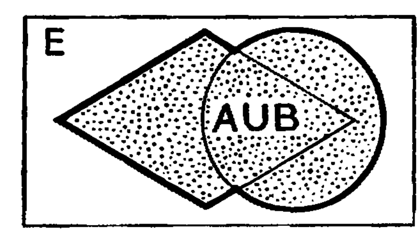


Fig. 4.

Plus généralement :

L'intersection de plusieurs ensembles A, B, C *est l'ensemble* I *constitué par les éléments communs à* A, B, C, *et se note* $A \cap B \cap C$.

Si A, B, C sont respectivement les ensembles d'entiers naturels multiples de 2, de 3 et de 5, l'intersection de ces ensembles est l'ensemble des multiples de 30.

Deux ensembles sont disjoints lorsqu'ils n'ont aucun élément commun.

Dans ce cas : $A \cap B = \varnothing$.

9. Réunion de deux ensembles. — ***On appelle réunion de deux ensembles*** A ***et*** B ***l'ensemble*** R ***constitué par les éléments appartenant à l'un au moins des ensembles*** A ***et*** B (fig. 4).

On écrit : $\boxed{R = A \cup B}$ et on lit " A *union* B "

Donc : $x \in R \Longleftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$. La conjonction « ou » signifiant que x appartient soit à A, soit à B, soit aux deux à la fois.

Ainsi l'ensemble { rectangles } $\cup$ { losanges } comprend non seulement les rectangles et les losanges ordinaires mais aussi les carrés. Plus généralement :

La réunion de plusieurs ensembles A, B, C *est l'ensemble* R *constitué par les éléments appartenant à l'un au moins des ensembles* A, B, C *et se note* $A \cup B \cup C$.

Si A, B, C sont respectivement l'ensemble des nombres réels x tels que $2 \leqslant x \leqslant 5$; $3 \leqslant x \leqslant 7$ et $6 \leqslant x \leqslant 8$, la réunion de ces ensembles est l'ensemble des réels x tels que $2 \leqslant x \leqslant 8$.

On effectue une partition d'un ensemble E, ***lorsqu'on répartit les éléments de*** E ***en plusieurs sous-ensembles disjoints deux à deux*** A, B, C ***dont la réunion est l'ensemble*** E.

Ainsi les quatre symboles : trèfle, carreau, cœur, pique déterminent une partition de l'ensemble des cartes d'un jeu en quatre sous-ensembles disjoints (appelés couleurs).

10. Algèbre des parties d'un ensemble fini. — Soit E un ensemble fini. Les sous-ensembles de E sont les éléments d'un nouvel ensemble appelé « ensemble des parties de E » et noté $\mathcal{P}_{(E)}$. Donc :

$$A \in \mathcal{P}_{(E)} \Longrightarrow A \subseteq E. \quad \text{En particulier :} \quad \varnothing \in \mathcal{P}_{(E)} \text{ et } E \in \mathcal{P}_{(E)}.$$

Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{P}_{(E)}$, il en est de même de leur intersection et de leur réunion :

$$\left.\begin{array}{l}\forall A \in \mathcal{P}_{(E)} \\ \forall B \in \mathcal{P}_{(E)}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}A \cap B \in \mathcal{P}_{(E)} \\ A \cup B \in \mathcal{P}_{(E)},\end{array}\right.$$

On dit que l'intersection et la réunion sont des lois de composition internes définies dans l'ensemble $\mathcal{P}_{(E)}$. Ces lois possèdent les propriétés suivantes :

1°) ***Commutativité :*** $\forall A \in \mathcal{P}_{(E)}$; $\forall B \in \mathcal{P}_{(E)}$:

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A$$

L'intersection et la réunion ne font pas intervenir l'ordre dans lequel on prend les sous-ensembles A et B.

2°) ***Associativité*** : Si A, B, C sont trois éléments de $\mathcal{P}_{(E)}$:

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Pour que $x \in A \cap (B \cap C)$, il faut et il suffit que x soit commun à A et à $B \cap C$, donc à A, B, et C, donc qu'il appartienne à $A \cap B \cap C$.

Pour que $x \in A \cup (B \cup C)$, il faut et il suffit que x appartienne à l'un au moins des ensembles A et $B \cup C$, donc à l'un au moins des ensembles A, B, C, donc qu'il appartienne à $A \cup B \cup C$.

3° ***Distributivité :*** Chacune des deux lois est distributive par rapport à l'autre, c'est-à-dire, si A, B, C sont trois éléments de $\mathcal{P}_{(E)}$:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

et

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Si x appartient à $A \cup (B \cap C)$, il appartient à A ou il est commun à B et C, il appartient donc à $A \cup B$ et à $A \cup C$, donc à leur intersection. Réciproquement si x appartient à $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, il appartient à la fois à A ou B et A ou C, donc x appartient à A ou il est commun à B et C, donc il appartient à $A \cup (B \cap C)$.

Si x appartient à $A \cap (B \cup C)$, il est commun à A et à $B \cup C$; il appartient donc à $(A \cap B)$ ou à $(A \cap C)$ donc à $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Réciproquement si x appartient à $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, il appartient à $A \cap B$ ou à $A \cap C$; donc x appartient d'une part à A, d'autre part à B ou C, il appartient donc à $A \cap (B \cup C)$.

11. Produit cartésien de deux ensembles. — ***On appelle produit de l'ensemble* A *par l'ensemble* B*, l'ensemble de tous les couples constitués par l'association, dans cet ordre, d'un élément de* A *et d'un élément de* B.**

Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{x, y\}$. Le produit $P = A \times B$ ou AB de ces deux ensembles admet pour éléments les 6 couples suivants (fig. 5) :

$$(a; x),\ (a; y),\ (b; x),\ (b; y),\ (c; x) \text{ et } (c; y).$$

A \ B	x	y
a	$(a;x)$	$(a;y)$
b	$(b;x)$	$(b;y)$
c	$(c;x)$	$(c;y)$

Fig. 5.

Premier élément \ Deuxième élément	a	b	c
a	$(a;a)$	$(a;b)$	$(a;c)$
b	$(b;a)$	$(b;b)$	$(b;c)$
c	$(c;a)$	$(c;b)$	$(c;c)$

Fig. 6.

Plus généralement, si A et B admettent respectivement n et p éléments, leur produit AB admet np éléments.

Le carré d'un ensemble* A *est le produit* $A^2 = A \times A$ *de cet ensemble par lui-même.

Si A admet n éléments, son carré A^2 en admet n^2. Ainsi le carré de $A = \{a, b, c\}$ admet les neuf éléments (fig. 6) :

$$(a; a),\ (a; b),\ (a; c),\ (b; a),\ (b; b),\ (b; c),\ (c; a),\ (c; b) \text{ et } (c; c).$$

RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE

12. Définition. — ***On établit une relation binaire entre les éléments d'un ensemble* E*, si à tout couple* $(a; b)$ *de* E^2 *on peut associer une propriété* $\mathcal{R}$ *telle que le couple* $(a; b)$ *ou bien possède la propriété* $\mathcal{R}$ *ou bien ne la possède pas.***

Si le couple $(a; b)$ possède la propriété $\mathcal{R}$, on écrit : $\boxed{a \mathcal{R} b}$.

Le symbole $\mathcal{R}$ désigne le plus souvent l'un des symboles connus d'égalité, d'inégalité, de parallélisme, d'orthogonalité, d'inclusion, etc.

Ainsi l'égalité de deux vecteurs est une relation binaire entre les vecteurs de l'espace. Il en est de même de leur parallélisme ou de leur orthogonalité :

On écrit : $\vec{V_1} = \vec{V_2}$, $\vec{V_1} \parallel \vec{V_2}$ ou $\vec{V_1} \perp \vec{V_2}$

13. Propriétés. — ***Une relation binaire*** $\mathcal{R}$ ***dans un ensemble*** E ***est dite :***

1° ***Réflexive*** si $a \in \mathrm{E} \Longrightarrow a \mathcal{R} a$.

2° ***Symétrique*** si $a \mathcal{R} b \Longrightarrow b \mathcal{R} a$.

3° ***Antisymétrique*** si $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} a \Longrightarrow a = b$.

4° ***Transitive*** si $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c \Longrightarrow a \mathcal{R} c$.

L'égalité de deux vecteurs est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive. L'orthogonalité de deux vecteurs est une relation symétrique mais non réflexive et non transitive.

La relation d'inclusion au sens large $\subseteq$ entre deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E est une relation réflexive, antisymétrique et transitive.

14. Relation d'équivalence. — ***Une relation*** $\mathcal{R}$ ***définie dans un ensemble*** E ***est dite relation d'équivalence si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.***

Donc : $a \in \mathrm{E} \Longrightarrow a \mathcal{R} a$ (*réflexivité*)

$a \neq b$ et $a \mathcal{R} b \Longrightarrow b \mathcal{R} a$ (*symétrie*)

a, b, c distincts : $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c \Longrightarrow a \mathcal{R} c$ (*transitivité*).

Exemples. — 1° Il en est ainsi des égalités définies en Algèbre ou en Géométrie :

$x = x$; $x = y \Longrightarrow y = x$ et $x = y$; $y = z \Longrightarrow x = z$.

$F_1 = F_1$; $F_1 = F_2 \Longrightarrow F_2 = F_1$ et $F_1 = F_2$; $F_2 = F_3 \Longrightarrow F_1 = F_3$.

2° La relation $\mathcal{R}$ exprimant que deux droites de l'espace ont même direction (parallèles ou confondues) est une relation d'équivalence car :

D_1 a même direction que D_1; $D_1 \parallel D_2 \Longrightarrow D_2 \parallel D_1$ et $D_1 \parallel D_2$, $D_2 \parallel D_3 \Longrightarrow D_1 \parallel D_3$.

3° Par contre, la relation d'orthogonalité entre deux droites de l'espace n'est pas une relation d'équivalence car une droite n'est pas orthogonale à elle-même, et les relations $D_1 \perp D_2$, $D_2 \perp D_3$ n'entraînent pas obligatoirement $D_1 \perp D_3$.

Deux éléments a et b de l'ensemble E *liés par la relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ *sont dits équivalents, modulo* $\mathcal{R}$.

15. Classes d'équivalence. — ***L'ensemble*** E ***étant muni d'une relation d'équivalence*** $\mathcal{R}$***, on appelle classe d'équivalence de l'élément*** a***, l'ensemble*** C_a ***de tous les éléments de*** E ***équivalents à*** a ***modulo*** $\mathcal{R}$.

1° Tout élément x de E appartient à une classe d'équivalence C_x car $x \mathcal{R} x$.

2° Deux classes d'équivalence qui ont un élément commun sont confondues.

En effet, si $x \in C_a$ et $x \in C_b$ les relations $x \mathcal{R} a$ et $x \mathcal{R} b$ entraînent par symétrie et transivité : $a \mathcal{R} b$, soit $C_a = C_b$.

3° Si a et b ne sont pas équivalents modulo $\mathcal{R}$, les classes d'équivalence C_a et C_b ne peuvent posséder d'élément commun x, sinon elles seraient confondues, ce qui entraînerait $a \mathcal{R} b$, contraire à l'hypothèse.

La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ permet donc d'effectuer une partition de E en sous-ensembles disjoints C_a, C_b, C_c ... dont la réunion est l'ensemble E.

L'ensemble des classes d'équivalence de* E *modulo* $\mathcal{R}$ *est appelé l'ensemble quotient de* E *par* $\mathcal{R}$ *et s'écrit $\frac{E}{\mathcal{R}}$.

EXEMPLE. — Soit E l'ensemble des droites de l'espace et soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence exprimant que deux droites de l'espace ont même direction (n° 14, exemple 2).

Toutes les droites de même direction qu'une droite donnée D_1 constituent la classe d'équivalence C_1 définie par D_1 (ou par l'une de ses parallèles). Si D_1 et D_2 n'ont pas même direction, elles définissent deux classes disjointes, C_1 et C_2 ne possédant aucun élément commun.

L'ensemble des classes d'équivalence C_1, C_2, C_3... est l'ensemble quotient $\frac{E}{\mathcal{R}}$ qui n'est autre que l'ensemble des directions de l'espace.

16. Relation d'ordre au sens strict. — ***Une relation binaire*** $\mathcal{R}$ ***dans un ensemble* E *est une relation d'ordre au sens strict si elle est transitive et si*** $a \mathcal{R} b$ ***exclut*** $b \mathcal{R} a$.

Une telle relation ne peut être réflexive car $a \mathcal{R} a$ s'exclut lui-même.

Dans l'ensemble des nombres relatifs, le symbole $<$ définit une relation d'ordre strict : car $a < b$ et $b < c \Longrightarrow a < c$: la relation est transitive. D'autre part : $a < b$ exclut $b < a$ ou $b = a$.

De même parmi les sous-ensembles d'un ensemble E la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre strict.

17. Relation d'ordre au sens large. — ***Une relation binaire*** $\mathcal{R}$ ***dans un ensemble* E *est une relation d'ordre au sens large si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.***

Dans l'ensemble des nombres relatifs, le symbole $\leqslant$ définit une relation d'ordre large.

En effet : $a \leqslant a$ (réflexivité); $a \leqslant b$ et $b \leqslant a \Longrightarrow a = b$ (antisymétrie)

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c \qquad \text{(transitivité).}$$

De même le symbole $\subseteq$ définit une relation d'ordre au sens large (n° 12).

18. Ensemble ordonné. — ***Un ensemble* E *dans lequel est définie une relation d'ordre*** $\mathcal{R}$ ***est dit ordonné.***

On peut en effet classer dans un ordre déterminé tous les éléments d'un sous-ensemble de E lorsque ces éléments sont deux à deux comparables par $\mathcal{R}$, c'est-à-dire vérifient soit $a \mathcal{R} b$ soit $b \mathcal{R} a$.

Ainsi les relations $a \mathcal{R} c$, $d \mathcal{R} b$ et $c \mathcal{R} d$ permettent d'écrire : $a \mathcal{R} c \mathcal{R} d \mathcal{R} b$ d'où le classement ou l'ordre : a, c, d, b.

1° Lorsque deux éléments distincts quelconques d'un ensemble E sont comparables par une relation d'ordre (strict ou large), cette relation $\mathcal{R}$ est dite d'*ordre total* et l'ensemble E est dit *totalement ordonné.*

Il en est ainsi de l'ensemble des nombres relatifs par la relation $<$ (ou $\leqslant$), d'un ensemble d'événements historiques par l'ordre chronologique, de l'ensemble des mots du dictionnaire par l'ordre alphabétique. Cet exemple permet de voir qu'une modification de la relation d'ordre $\mathcal{R}$ (l'ordre des lettres de l'alphabet) entraînerait un bouleversement complet de l'ordre des mots dans le dictionnaire.

2° Lorsque deux éléments distincts de E ne sont pas nécessairement comparables par $\mathcal{R}$, cette relation est dite d'*ordre partiel* et l'ensemble E est dit *partiellement ordonné.*

Ainsi dans l'ensemble N des entiers naturels la relation $\mathcal{R}$ qui exprime que *a* est *un diviseur de b*, est une relation d'ordre large qui permet de classer 3, 6, 24, 120, 240 ou 1, 7, 21, 42, 126 mais qui ne permet pas de comparer 3 et 7 ou 11 et 25. Ce n'est qu'une relation d'ordre partiel.

APPLICATIONS

19. Notion d'application. — ***On appelle application d'un ensemble* A *dans un ensemble* B, *toute correspondance qui, à tout élément de* A, *associe un élément unique de* B.**

Cette correspondance est symbolisée par une lettre T, f ... et :

$$\forall a \in A, \exists b \in B \quad \text{tel que} \quad b = T(a) \quad \text{ou} \quad b = f(a).$$

On écrit : $a \twoheadrightarrow b = f(a)$ ou $a \underset{\frown}{f} b$ et on lit : « *a* s'applique sur *b* ».

(Éviter d'écrire $a \longrightarrow b$ s'il peut y avoir confusion avec « *a* tend vers *b* »).

L'ensemble A est l'*ensemble initial* et l'ensemble B *l'ensemble final* de l'application. L'élément *a* est l'*antécédent* de *b* et l'élément *b* est l'*image de a* dans B.

Lorsque l'ensemble B est confondu avec A on a affaire à une application de A sur lui-même.

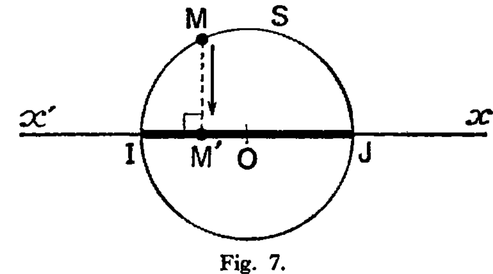


Fig. 7.

EXEMPLE. — Soit A l'ensemble des points M du cercle de diamètre IJ (fig. 7) et B l'ensemble des points M' de la droite $x'x$ définie par IJ. La projection orthogonale T de M en M' sur $x'x$ est une application de A dans B et : $M \twoheadrightarrow M' = T(M)$.

20. Injection. — Surjection.

1° ***Une application «f» de* A *dans* B *est dite injective lorsque deux éléments distincts de* A *ont des images distinctes dans* B.**

$$\forall a_1, a_2 \in A : \quad a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2). \qquad \text{(fig. 8)}$$

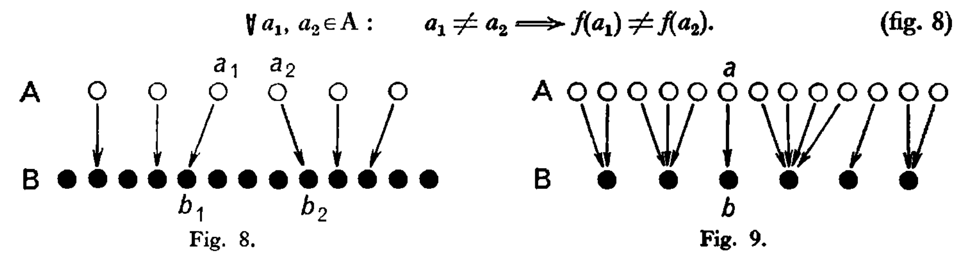


Fig. 8. Fig. 9.

2° ***Elle est dite surjective lorsque tout élément de* B *est l'image d'au moins un élément de* A. *On dit alors que* A *s'applique sur* B.**

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tel que} : \quad b = f(a). \qquad \text{(fig. 9)}$$

Ainsi la projection orthogonale sur la droite $x'x$ (fig. 7) réalise une application injective, non surjective, du demi-cercle ISJ sur la droite $x'x$. Par contre elle réalise une application surjective, non injective, du cercle entier de diamètre IJ sur le segment de droite IJ.

21. Bijection. — ***Une application « f » de* A *dans* B *est dite bijective (ou biunivoque) si tout élément de* B *est l'image d'un élément unique de* A.**

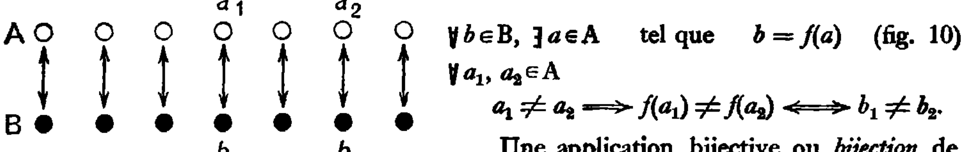


Fig. 10.

$\forall b \in B, \exists a \in A$ tel que $b = f(a)$ (fig. 10)

$\forall a_1, a_2 \in A$

$$a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \Longleftrightarrow b_1 \neq b_2.$$

Une application bijective ou *bijection* de A sur B est donc une application à la fois surjective et injective de A dans B.

Ainsi (fig. 7) la projection orthogonale sur $x'x$ réalise une bijection du demi-cercle ISJ sur le segment IJ.

22. Bijections réciproques. — ***Toute bijection « f » d'un ensemble* A *sur un ensemble* B *définit une bijection « φ » de* B *sur* A. *Les deux bijections associées « f » et « φ » sont dites inverses ou réciproques.***

L'application « f » étant bijective, tout élément b de B admet un antécédent unique a dans A. La correspondance $b \multimap a$ ainsi réalisée définit une application « φ » de B dans A (nº 19). Comme tout élément a de A est ainsi l'image de l'élément unique $f(a)$ de B, cette application « φ » est bijective (nº 21). Donc :

$$a \multimap b = f(a) \Longleftrightarrow b \multimap a = \varphi(b).$$

On dit qu'il y a une *correspondance bijective* entre les éléments de l'ensemble A et ceux de l'ensemble B, ce qui s'écrit : $a \leftrightarrow b$.

Notons qu'on appelle *application identique* $\mathfrak{I}_A$ l'application bijective de tout ensemble A sur lui-même dans laquelle chaque élément a coïncide avec son image.

23. Composition des applications. — Considérons une application « f » de A dans B et une application « g » de B dans C.

A tout élément a de A, on peut successivement associer l'élément $b = f(a)$ de B puis l'élément $c = g(b) = g[f(a)]$. La correspondance $a \multimap c$ ainsi réalisée définit une application « h » de A dans C. On écrit :

$$c = h(a) = g[f(a)]$$

ou

$$\boxed{h(a) = g \circ f(a)}$$

ce qui revient à poser (fig. 11) :

$$h = g \circ f.$$

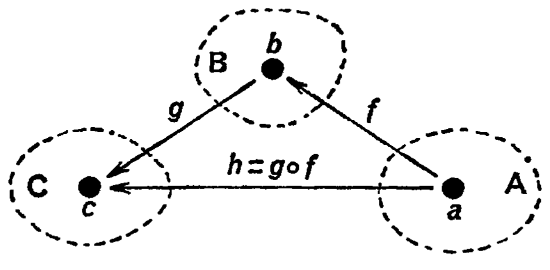


Fig. 11.

L'application $h = g \circ f$ est le composé des applications « f » et « g » effectuées dans cet ordre.

Exemple. — Soient deux plans rectangulaires P et Q issus de la droite Δ (fig. 12). Désignons par f, g et h les projections orthogonales d'un point M de l'espace, respectivement en H sur P, en K sur Q et en N sur Δ. On voit que :

$$M \to H = f(M) \to N = g(H) = g \circ f(M) = h(M)$$
$$M \to K = g(M) \to N = f(K) = f \circ g(M) = h(M).$$

Il en résulte que : $h = f \circ g = g \circ f$. Le composé des deux applications f et g de l'ensemble E des points de l'espace sur P et Q est donc commutatif.

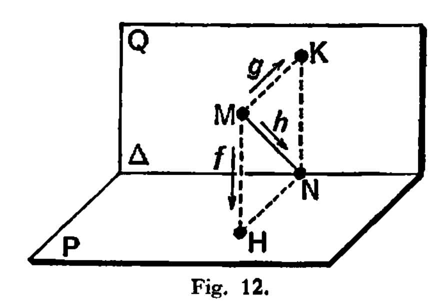


Fig. 12.

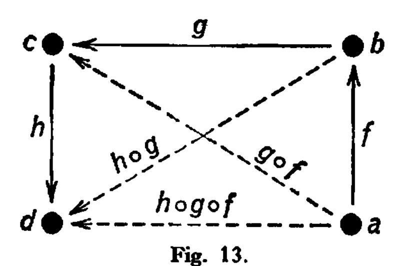


Fig. 13.

Lorsque les applications « f » et « g » sont deux bijections réciproques de A sur A, leur produit est l'application identique : $f \circ g = g \circ f = \mathfrak{J}_A$.

C'est pourquoi l'application réciproque de « f » est symbolisée par « f^{-1} »

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathfrak{J}_A.$$

Un produit de plusieurs applications est toujours associatif. Ainsi (fig. 13) :

$$a \to b = f(a) \to c = g\,[f(a)] \to d = h\;\{g\,[f(a)]\}$$

On peut d'autre part écrire : $d = h(c) = h\,[g \circ f(a)]$ ou $d = h \circ g(b) = h \circ g\,[f(a)]$.

Ce qui conduit à écrire : $h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

EXERCICES

1. On considère tous les quadrilatères plans convexes Q dont les diagonales AC et BD se coupent en O et dont les angles sont A, B, C, D. Former tous les groupes de propriétés équivalentes à :

$$Q \in \{\text{parallélogrammes}\}.$$

2. Reprendre le problème précédent pour $Q \in \{\text{rectangles}\}$, pour $Q \in \{\text{losanges}\}$, $Q \in \{\text{carrés}\}$ et enfin $Q \in \{\text{trapèzes isocèles}\}$.

3. On donne dans l'espace un plan P et deux droites D et Δ non contenues dans le plan P. Établir l'équivalence :

$$\left|\begin{matrix}\Delta \perp P \\ \Delta \perp D\end{matrix}\right| \Longleftrightarrow \left|\begin{matrix}P \parallel D \\ P \perp \Delta\end{matrix}\right|$$

Énoncer les conditions nécessaires et suffisantes qui en découlent.

4. Un angle AOB se projette orthogonalement en A'O'B' sur un plan P non parallèle à OB. Énoncer les théorèmes traduisant les équivalences :

$$\left|\begin{matrix}OA \perp OB \\ OA \parallel O'A'\end{matrix}\right| \Longleftrightarrow \left|\begin{matrix}O'A' \perp O'B' \\ O'A' \parallel OA\end{matrix}\right| \Longleftrightarrow \left|\begin{matrix}OA \perp OB \\ O'A' \perp O'B'\end{matrix}\right|$$

5. Étudier l'application de la loi de réciprocité sur l'un des exemples suivants : position d'un point du plan par rapport à une médiatrice, ou à une bissectrice ou par rapport à un cercle. Position relative d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles. Arc capable, etc.

6. A étant un sous-ensemble de l'ensemble E, établir les relations suivantes :

$$A \cup \varnothing = A; \quad A \cup E = E; \quad A \cup A = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing; \quad A \cap E = A; \quad A \cap A = A$$

7. On désigne par E — A, l'ensemble complémentaire de A dans l'ensemble E. Établir les relations suivantes :

$$A \cup (E - A) = E \quad ; \quad A \cap (E - A) = \varnothing$$
$$A \subset B \Longleftrightarrow E - B \subset E - A$$

8. Soient A et B deux éléments donnés de $\mathcal{P}_E$.

1° A quelle condition peut-on trouver des éléments X de $\mathcal{P}_E$ tels que : $A = B \cap X$?

2° A quelle condition peut-on trouver des éléments Y de $\mathcal{P}_E$ tels que : $A = B \cup Y$?

3° Montrer qu'il n'existe pas d'éléments X ni d'éléments Y appartenant à $\mathcal{P}_E$ et tels que :

$$A \cap X = E \quad \text{ou} \quad A \cup Y = \varnothing.$$

9. Démontrer que :

$$\left.\begin{array}{r} A \cup B \subset A \cup C \\ \text{et } A \cap B \subset A \cap C \end{array}\right\} \Longrightarrow B \subset C.$$

10. Soient A et B éléments de $\mathcal{P}_E$. On désigne pat $\overline{A}$ et $\overline{B}$ leurs complémentaires dans E.

1° Dénombrer les relations :

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \quad ; \quad \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}.$$

2° En déduire que les propriétés relatives à l'une des lois $\cap$ ou $\cup$ sont conséquences l'une de l'autre.

11. Démonter le nombre des éléments de $\mathcal{P}_E$ lorsque E comprend 1, 2, 3 ou 4 éléments. Vérifier que si n est le nombre des éléments de E, celui de $\mathcal{P}_E$ est 2^n.

12. Si E est l'ensemble des nombres x tels que $0 \leqslant x \leqslant 4$, montrer que l'ensemble E^2 peut être représenté géométriquement par l'ensemble des points non extérieurs à un carré de côté 4 construit sur deux axes rectangulaires Ox et Oy.

— Examiner si les relations suivantes sont des relations d'équivalence et déterminer s'il y a lieu les classes d'équivalence correspondantes ;

13. E désigne l'ensemble des axes de l'espace, et $\mathcal{R}$ exprime que deux axes ont même direction et même sens.

14. E désigne l'ensemble des triangles d'un plan et $\mathcal{R}$ exprime que deux triangles sont semblables.

15. E désigne l'ensemble des triangles d'un plan et $\mathcal{R}$ exprime que deux triangles sont équivalents.

16. E désigne l'ensemble des points de l'espace et $\mathcal{R}$ exprime que les points A et B sont alignés avec un point fixe O.

17. Deux entiers relatifs a et b sont dits congruents modulo 5, si la différence $a - b$ ou $b - a$ est un multiple de 5. On écrit : $17 \equiv 2 \pmod 5$.

Montrer que cette congruence est une relation d'équivalence dans l'ensemble Z des entiers relatifs et qu'elle définit cinq classes d'équivalence désignées par leur plus petit élément positif ou nul : $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

18. 1° Démontrer que dans le plan, les deux relations :

$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D'}) - (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'D'}) \pmod{2\pi}$$

établissent une relation d'équivalence entre les quadrangles ABCD et A'B'C'D'.

2° Donner une construction de D′ connaissant A′, B′ et C′ et sachant que A′B′C′D′ appartient à la classe d'équivalence du quadrangle donné ABCD.

19. Étant donné une droite Δ dans le plan, deux cercles O (R) et O′ (R′) seront dits associés à Δ si OO′ est perpendiculaire en I à Δ et si l'on a : $\overline{IO}^2 - R^2 = \overline{IO'}^2 - R'^2$.

Établir que la relation entre deux cercles associés à Δ est une relation d'équivalence. Que représente chacune des classes d'équivalence ? *(faisceau de cercles d'axe Δ).*

— Étudier les propriétés de l'application « f » qui applique l'ensemble A dans l'ensemble B dans les cas suivants :

20. A est l'ensemble des points de l'espace; B est l'ensemble des points d'un plan P; « f » est la projection orthogonale sur le plan P donné.

21. A et B sont l'ensemble des points de l'espace et « f » est la symétrie par rapport à une droite Δ donnée.

22. A et B sont l'ensemble des points de l'espace et « f » est la symétrie par rapport à un point donné O.

23. A et B sont l'ensemble des points de l'espace et « f » est la translation de vecteur donné $\vec{T}$.

24. A et B sont l'ensemble des points de l'espace et « f » est une homothétie donnée (O, k).

25. A et B sont l'ensemble R des nombres réels x et $x \mapsto 3x + 5$.

26. A est l'ensemble R des réels x; B est l'ensemble R^+ des réels positifs ou nul et : $x \mapsto x^2$.

27. A est l'ensemble des réels x dont la mesure en radians est : $0 \leqslant x \leqslant \pi$; B est l'ensemble des réels appartenant à $[0; 1]$ et : $x \mapsto \sin x$.

28. A est l'ensemble des réels x dont la mesure en radians est : $0 \leqslant x \leqslant \pi$; B est l'ensemble des réels appartenant à $[-1; +1]$ et : $x \mapsto \cos x$.

29. 1° Dénombrer que s'il existe une application bijective d'un ensemble fini A sur un ensemble fini B, ces deux ensembles ont un même nombre d'éléments n.

2° Déterminer le nombre des applications bijectives de A sur B lorsque $n = 3$.

30. On appelle *substitution* toute application bijective d'un ensemble fini A sur lui-même. En prenant $A = \{a, b, c\}$ dénombrer le nombre des substitutions que l'on peut effectuer sur l'ensemble A, y compris la substitution identique.

31. Soit E un ensemble, A et B deux éléments de $\mathcal{P}_{(E)}$ et f une application de l'ensemble E dans l'ensemble E′. Montrer que :

$$A \subset B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B); \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B); \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

32. On considère une application « f » de A dans B et une application « g » de B dans C. Montrer que si les applications « f » et « g » sont toutes deux soit injectives, surjectives ou bijectives, il en est de même de leur produit « h » = « $g_0 f$ » de A dans C.

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

24. Définition. — Une équation à une inconnue x est du second degré lorsqu'elle se ramène à la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \in \mathrm{R}$, $b \in \mathrm{R}$, $c \in \mathrm{R}$ avec $a \neq 0$.

La résolution de cette équation revient à déterminer dans R, les racines (ou les zéros) du *trinôme* du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

25. Résolution. — Puisque $a \neq 0$, on peut écrire :

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

et
$$f(x) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \qquad (1)$$

$\Delta = b^2 - 4\,ac$ est le *discriminant* du trinôme ou de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.

1er cas : $\Delta < 0 \Longrightarrow \dfrac{4ac - b^2}{4a^2} > 0$. Le premier membre de l'équation (1) qui s'écrit $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}$ est la somme d'un nombre positif et d'une expression $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ positive ou nulle. Il ne peut être nul. Il n'y a donc pas de nombre réel x, racine de l'équation.

2e cas : $\Delta = 0 \Longrightarrow \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$; l'équation (1) se réduit à :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0.$$

Elle admet la racine *double réelle* : $\boxed{x' = -\dfrac{b}{2a}.}$ (2)

3e cas : $\Delta > 0 \Longrightarrow \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et l'équation (1) est équivalente à :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0.$$

L'équation admet deux racines distinctes :

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \implies \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad (3)$$

Le nombre de racines réelles dépend donc du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta < 0$: Pas de racine *réelle*.	
$\Delta = 0$: Une racine double *réelle* :	$x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta > 0$: Deux racines *réelles* distinctes :	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

26. Remarques. — 1° ***Si a et c sont de signes différents, l'équation a deux racines distinctes réelles.***
En effet : $ac < 0$ ou $-4ac > 0 \implies b^2 - 4ac > 0$.

2° **Formule réduite.** — Si $b = 2b'$; il vient : $\Delta = (2b')^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta'$.
Le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$ est du signe de Δ et, si $\Delta' \geqslant 0$:

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

soit :

$$\boxed{x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}} \qquad (4)$$

27. Exemples. — Dans les applications numériques on calcule Δ (ou Δ') et on utilise les formules du n° 25 ou du n° 26.

1[er] Exemple : $x^2 - 7x + 11 = 0$.

$a = 1,\ b = -7$ et $c = 11$. Donc $\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 44 = 5$.

L'équation a donc deux racines distinctes : $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, soit :

$$x' = \frac{7+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{7-\sqrt{5}}{2}.$$

2[e] Exemple : $x^2 - 10x + 21 = 0$.

$a = 1,\ b' = -5,\ c = 21$ et $\Delta' = b'^2 - ac = 25 - 21 = 4$.

L'équation a deux racines : $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

Soit : $x = 5 \pm 2$. Donc : $x' = 7$ et $x'' = 3$.

3[e] Exemple : $9x^2 - 30x + 25 = 0$.
$\Delta' = b'^2 - ac = 15^2 - 9 \cdot 25 = 225 - 225 = 0$.
L'équation a une racine double :

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a} = \frac{30}{2 \cdot 9}, \quad \text{soit :} \quad x' = x'' = \frac{5}{3}.$$

4[e] Exemple : $3x^2 + 7x + 5 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 49 - 60 = -11$. L'équation est impossible.

28. Équations particulières ou incomplètes. — En général, on évite l'emploi des formules de résolution dans tous les cas où la factorisation du premier membre de l'équation $f(x) = 0$ est immédiate.

Ainsi : $$(2x - 1)^2 - (x - 8)^2 = 0$$
s'écrit : $$(2x - 1 + x - 8)(2x - 1 - x + 8) = 0.$$
ou : $(3x - 9)(x + 7) = 0.$ *Racines :* $x' = 3$; $x'' = -7$.

On peut opérer de cette façon lorsque l'un des coefficients c ou b est nul :

1° $3x^2 - 12x = 0 \iff 3x(x - 4) = 0$ *Racines :* 0 *et* 4.

2° $4x^2 - 25 = 0 \iff (2x + 5)(2x - 5) = 0$ *Racines :* $\pm \frac{5}{2}$.

3° $9x^2 - 20 = 0 \iff (3x - 2\sqrt{5})(3x + 2\sqrt{5}) = 0.$ *Racines :* $\pm \frac{2\sqrt{5}}{3}$,

4° $3x^2 + 7 = 0$ ou $x^2 = -\frac{7}{3}$ est impossible.

29. Problème. — *Pour quelles valeurs de* m *l'équation du second degré en* x : $x^2 - 2(m + 2)x + 2m^2 + 7 = 0$ *admet-elle une racine égale à* $+5$?

Il serait maladroit de calculer x' et x'' en fonction de m pour écrire $x' = 5$ ou $x'' = 5$, car cela conduirait à une double équation irrationnelle en m.

Écrivons que pour $x = 5$ l'équation proposée est vérifiée. On obtient :
$$25 - 10(m + 2) + 2m^2 + 7 = 0 \iff m^2 - 5m + 6 = 0.$$
Cette équation du second degré en m admet pour racines $m = 2$ et $m = 3$.
On vérifie que l'équation proposée devient :

1° Pour $m = 2$: $x^2 - 8x + 15 = 0$ Racines : $x' = 5$; $x'' = 3$.

2° Pour $m = 3$: $x^2 - 10x + 25 = 0$ Racines : $x' = x'' = 5$.

SOMME ET PRODUIT DES RACINES.

30. Théorème. — ***Pour que deux nombres distincts ou confondus*** x' ***et*** x'' ***soient racines de l'équation :*** $ax^2 + bx + c = 0$, ***il faut et il suffit que leur somme soit égale à*** $-\frac{b}{a}$ ***et leur produit à*** $\frac{c}{a}$.

1° Pour $\Delta \geqslant 0$ l'équation admet deux racines distinctes ou confondues :
$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
On en déduit
$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a} \implies \boxed{x' + x'' = -\frac{b}{a}} \quad (1)$$
$$x'x'' = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \implies \boxed{x'x'' = \frac{c}{a}} \quad (2)$$

2° Deux nombres donnés, x' et x'', sont racines de l'équation du second degré :
$$(x - x')(x - x'') = 0 \iff x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0. \quad (3)$$
Si les nombres x' et x'' vérifient les relations (1) et (2), cette équation s'écrit :
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff ax^2 + bx + c = 0.$$

31. Corollaire. — ***Si deux nombres x et y ont pour somme S et pour produit P ces deux nombres sont les racines de l'équation en X :***

$$X^2 - SX + P = 0. \tag{4}$$

C'est en effet ce que devient l'équation (3) du paragraphe précédent lorsqu'on remplace x, $x' + x''$ et $x''x''$ par X, S et P. Les nombres cherchés x et y sont réels si : $\Delta = S^2 - 4P \geqslant 0$.

EXEMPLES : 1° $S = 13$, $P = -68$. Les nombres x et y sont racines de l'équation $X^2 - 13X - 68 = 0$. On trouve : $x = -4$, $y = 17$.

2° $S = 6$, $P = 13$. L'équation $X^2 - 6X + 13 = 0$ n'a pas de racines réelles, le problème est impossible dans R.

3° $S = 30$, $P = 225$. L'équation $X^2 - 30X + 225 = 0$ a une racine double car $\Delta' = 15^2 - 225 = 0$.

Donc : $$x = y = \frac{S}{2} = 15.$$

32. Calcul d'une racine connaissant l'autre. — Si on connaît une racine x' de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$, l'autre est : $x'' = -\frac{b}{a} - x' = \frac{c}{ax'}$.

Ainsi : $f(x) \equiv 4x^2 - 5x - 6 = 0$ admet la racine $x' = 2$ car $f(2) = 0$.

L'autre racine $x'' = \frac{5}{4} - 2$ ou $-\frac{6}{4 \times 2}$ est donc égale à $-\frac{3}{4}$.

33. Calcul mental des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. (1)

1° En faisant $x = +1$ ou $x = -1$ dans $f(x) = ax^2 + bx + c$ on voit que :

Si $a + b + c = 0$ *l'équation* (1) *admet les racines :* $x' = 1$ *et* $x'' = \frac{c}{a}$.

Si $a - b + c = 0$ ou $b = a + c$ *elle a pour racines :* $x' = -1$ *et* $x'' = -\frac{c}{a}$.

$3x^2 + 4x - 7 = 0$ a pour racines : $+1$ et $-\frac{7}{3}$

$x^2 + 6x + 5 = 0$ a pour racines : -1 et -5.

2° *Lorsqu'on peut trouver mentalement deux nombres α et β tels que* $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ *et* $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, *ces deux nombres sont les racines de l'équation* (1).

$x^2 - 13x + 42 = 0$ admet pour racines : $+6$ et $+7$

$x^2 + 7x - 44 = 0$ a pour racines : -11 et $+4$.

3° *Si deux nombres α et β ont pour somme $-b$ et pour produit ac, les racines de l'équation* (1) *sont :* $\frac{\alpha}{a}$ *et* $\frac{\beta}{a}$.

En effet : $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{a} = -\frac{b}{a}$ et $\frac{\alpha}{a} \times \frac{\beta}{a} = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a}$. On trouve α et β en résolvant :

$$X^2 + bX + ac = 0.$$

EXEMPLE : $3x^2 - 13x + 14 = 0$. Les racines de $X^2 - 13X + 42 = 0$ étant 6 et 7 on a :

$$x' = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{7}{3}.$$

SIGNE DES RACINES

34. Signe des racines. — On peut prévoir le signe des racines réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sans calculer ces racines :

1° $\frac{c}{a} < 0$. Les coefficients a et c sont de signes opposés. L'équation a deux racines distinctes (n° 26,1°) dont le produit P est négatif. Ces deux racines sont donc de signes contraires et : $x' < 0 < x''$. La plus grande des racines, en valeur absolue, a même signe que la somme S.

Lorsque a et c sont de signes contraires, l'équation** : $ax^2 + bx + c = 0$ **a deux racines réelles de signes opposés.

2° $\frac{c}{a} = 0$ ou $c = 0$. L'une des racines est nulle et l'autre égale à la somme $S = -\frac{b}{a}$ et a donc même signe qu'elle : $x' = 0$; $x'' = -\frac{b}{a}$.

3° $\frac{c}{a} > 0$ et $\Delta \geqslant 0$. L'équation a des racines réelles, de même signe puisque leur produit P est positif. Leur signe commun est celui de leur somme $S = -\frac{b}{a} \neq 0$. En définitive :

Équation : $ax^2 + bx + c = 0$		Racines x' et x''
1° $\frac{c}{a} < 0$	....	$x' < 0 < x''$
2° $c = 0$	....	$x' = 0$; $x'' = S$
3° $\frac{c}{a} > 0$ et $\Delta \geqslant 0$	$-\frac{b}{a} > 0$	$0 < x' \leqslant x''$
	$-\frac{b}{a} < 0$	$x' \leqslant x'' < 0$

35. Discussion d'une équation paramétrique.

Étudier suivant les valeurs de* m *l'existence et le signe des racines de l'équation :

$$(m - 4)\,x^2 - 2\,(m - 2)\,x + m - 1 = 0.$$

Notons d'abord que l'équation est du 1er degré pour $m = 4$ et admet pour racine $x = 3/4$.

Pour $m \neq 4$, l'équation est du second degré :

$$\Delta' = (m-2)^2 - (m-4)(m-1) = m, \qquad P = \frac{m-1}{m-4}, \qquad S = \frac{2\,(m-2)}{m-4}.$$

On étudie le signe de Δ', P et S suivant les valeurs de m, et on enregistre les résultats dans un tableau commun après avoir classé les valeurs remarquables du paramètre : $-\infty$, 0, 1, 2, 4, $+\infty$ (disposées verticalement afin d'écrire aisément les conclusions).

Notons que la relation : $\frac{\Delta}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a} \implies S^2 = \frac{\Delta}{a^2} + 4P$ montre que Δ et P ne sont jamais négatifs en même temps et que $S = 0 \implies$ P ou Δ négatif.

m	Δ'	P	S	CONCLUSIONS
$+\infty$				
	+	+	+	Deux racines positives.
4	═══	═══	═══	═══ Éq. du 1er degré : $x = \frac{3}{4}$
	+	−	−	Deux racines de signes contraires.
2	......	$-\frac{1}{2}$	......0......	——— Deux racines opposées : $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
	+	−	+	Deux racines de signes contraires.
1	......	......0......	$\frac{2}{3}$	——— $x' = 0$; $x'' = \frac{2}{3}$
	+	+	+	Deux racines positives.
0	......0......	$\frac{1}{4}$	......1......	——— Une racine double : $x = \frac{1}{2}$
	−	+	+	Pas de racines réelles.
$-\infty$				

36. Fonctions symétriques des racines. — ***On appelle fonction symétrique des racines x' et x'' de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ toute expression formée à l'aide de x' et x'', qui se conserve quand on permute ces deux lettres.***

EXEMPLES : $x'^3 + x''^3$; $\dfrac{1}{x'-3} + \dfrac{1}{x''-3}$; $(2x' - 3x'')(2x'' - 3x')$.

On démontre que toute expression rationnelle symétrique en x' et x'' s'exprime en fonction rationnelle de $S = x' + x''$ et $P = x'x''$. Ainsi :

1° $x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = S^2 - 2P$.

2° $x'^3 + x''^3 = (x' + x'')^3 - 3x'x''(x' + x'') = S^3 - 3PS$.

3° $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''} = \dfrac{x' + x''}{x'x''} = \dfrac{S}{P}$ etc.

Pour calculer une telle expression, il suffit donc, après l'avoir exprimée en fonction de S et P, de remplacer S et P par leurs valeurs. On évite ainsi des calculs pénibles sur des expressions irrationnelles.

37. Problème. — *Déterminer le paramètre m de façon que l'équation :*

$$x^2 + (m - 2)x + m + 5 = 0$$

ait deux racines telles que : $x'^2 + x''^2 = 10$.

La relation imposée aux racines est symétrique et s'écrit :

$$(x' + x'')^2 - 2x'x'' - 10 = 0.$$

Soit $(m - 2)^2 - 2(m + 5) - 10 = 0$ ou $m^2 - 6m - 16 = 0$, ce qui donne pour m les valeurs -2 et 8.

Pour $m = -2$ l'équation proposée s'écrit : $x^2 - 4x + 3 = 0$ dont les racines, $x' = 1$ et $x'' = 3$, vérifient la relation imposée.

Pour $m = 8$ l'équation devient : $x^2 + 6x + 13 = 0$ et n'a pas de racines.

Seule la valeur $m = -2$ est solution du problème.

38. Relation entre les racines d'une équation paramétrique. — Lorsque les coefficients a, b, c, de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ dépendent d'un paramètre m, il en est de même de leur produit P et de leur somme S, soit :

$$P = f(m) \quad \text{et} \quad S = g(m).$$

En éliminant m entre ces deux relations, on obtient une relation indépendante de m entre P et S, donc une relation symétrique entre x' et x''.

Ainsi dans l'équation : $(m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0$, on obtient :

$$P = \frac{m-1}{m-4} = \frac{(m-4)+3}{m-4} = 1 + \frac{3}{m-4} \quad \text{et} \quad S = \frac{2m-4}{m-4} = \frac{2(m-4)+4}{m-4} = 2 + \frac{4}{m-4}.$$

D'où : $$\frac{1}{m-4} = \frac{P-1}{3} = \frac{S-2}{4} \implies 4P - 3S + 2 = 0.$$

Soit : $$4x'x'' - 3(x' + x'') + 2 = 0.$$

La méthode utilisée dans cet exemple est applicable lorsque les coefficients a, b, c, de l'équation proposée sont du 1er degré en m. Elle conduit à une relation symétrique du 1er degré entre $x'x''$ et $x' + x''$.

39. Applications. — 1° *Soit l'équation $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$. Former l'équation du second degré admettant pour racines : $X' = 2x' - 3x''$ et $X'' = 2x'' - 3x'$.*

On a : $S = X' + X'' = 2x' - 3x'' + 2x'' - 3x' = -(x' + x'') = -2m.$

$$P = X'X'' = (2x' - 3x'')(2x'' - 3x') = 13x'x'' - 6(x'^2 + x''^2)$$

d'où : $$P = 25x'x'' - 6(x' + x'')^2$$

donc $P = 25(3m - 2) - 6 \times 4m^2 = -24m^2 + 75m - 50$ et l'équation cherchée s'écrit :

$$\underline{X^2 + 2mX - 24m^2 + 75m - 50 = 0.}$$

2° *Former l'équation admettant pour racines les inverses des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où l'on suppose $c \neq 0$.*

On a : $X' = \frac{1}{x'}$ et $X'' = \frac{1}{x''}$ c'est dire : $X = \frac{1}{x}$ ou $x = \frac{1}{X}$. Il suffit d'exprimer que $\frac{1}{X}$ est racine de l'équation proposée :

$$a\left(\frac{1}{X}\right)^2 + b\left(\frac{1}{X}\right) + c = 0 \iff \underline{cX^2 + bX + a = 0.}$$

EXERCICES

— Résoudre les équations suivantes :

33. $2x^2 + 5x = 0.$

34. $21x^2 - 49x = 0.$

35. $(x + 5)^2 - 4x - 20 = 0.$

36. $x^2 - 25 + 3(x + 5) = 0.$

37. $4x^2 - 81 = 0.$

38. $27x^2 - 144 = 0.$

39. $(x - 9)^2 - 49 = 0.$

40. $(3x - 7)^2 - 4(x + 1)^2 = 0.$

41. $\frac{3x-2}{2x+5} - \frac{2x+5}{3x-2} = 0.$

42. $\frac{9x-27}{2x-7} - \frac{8x-28}{x-3} = 0.$

43. $x^2 - 14x + 33 = 0.$

44. $x^2 + 16x + 63 = 0.$

45. $x^2 - 11x + 28 = 0.$

46. $x^2 - 13x - 48 = 0.$

47. $5x^2 - 31x + 30 = 0.$

48. $7x^2 - 27x - 40 = 0.$

49. $6x^2 + 71x + 175 = 0.$

50. $21x^2 + 43x - 90 = 0.$

51. $15x^2 - 253x + 1066 = 0.$

52. $35x^2 - 137x - 360 = 0.$

53. $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 1 + 3\sqrt{2} = 0.$

54. $(2 + \sqrt{3})x^2 - (2\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 1) = 0.$

55. $\frac{2x + 1}{x - 2} - \frac{2x - 4}{x + 3} = 2.$

56. $\frac{2x - 1}{x + 1} + \frac{3x - 1}{x + 2} = \frac{5x - 11}{x - 1}.$

57. $\frac{x + 2}{x + 4} + \frac{x + 4}{x + 3} = \frac{11}{6}.$

58. $\frac{2x + 3}{x - 3} - \frac{3(x - 3)}{x + 3} = 2.$

59. $\frac{10x^2 + 3x - 2}{16x^2 + 30x + 9} = -1.$

60. $\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2} + \frac{3}{x - 3} = \frac{6}{x + 6}.$

— Résoudre les équations paramétriques :

61. $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0.$

62. $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0.$

63. $x^2 - (a + b + c)x + a(b + c) = 0.$

64. $x^2 - 2ax + a^2 - 9b^2 = 0.$

65. $x^2 - (2a - 3b)x - 6ab = 0.$

66. $3x^2 + 2(2a - b)x + a^2 - b^2 = 0.$

67. $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m - 3 = 0.$

68. $(m + 1)x^2 - (5m + 6)x + 3(2m + 3) = 0.$

69. $(a^2 - b^2)x^2 - 4a^2bx + 4a^2b^2 = 0.$

70. $a(a + b)x^2 - (a^2 + b^2)x - b(a - b) = 0.$

71. Soit l'équation : $(m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0.$

1° Étudier suivant les valeurs de m l'existence des racines de cette équation. Calculer les racines pour $m = -3$, 0, 3 et 4.

2° Calculer pour $x' = 2$, la valeur de m, puis celle de x''.

3° Quelle valeur faut-il donner à m pour que $x' = \frac{1 + \alpha}{2 + \alpha}$ soit racine de l'équation ? En déduire l'expression de la racine x'' en fonction de α, puis de x'.

72. Pour quelles valeurs de m l'équation : $(m + 7)x^2 - 2(m - 9)x - 7m + 15 = 0$, a-t-elle une racine double ? Calculer la valeur de cette racine double.

73. Soit l'équation : $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0.$

1° Calculer les racines pour $m = -\frac{3}{4}$, 2 et 8.

2° Calculer m pour que l'équation ait une racine double et trouver sa valeur.

74. On considère l'équation : $(m + 1)\,x^2 - (m + 3)\,x - m + 3 = 0$.

1° Calculer les racines pour $m = 2;\ 3;\ -7$ et $-\frac{13}{5}$.

2° Déterminer m pour que l'équation ait une racine double que l'on calculera.

3° Calculer les racines pour $m = \frac{t^2 + 3}{t^2 - 5}$.

75. Étant donnée l'équation : $x^2 - 2\,(m + 2)\,x + 2\,m^2 - 17 = 0$.

1° Calculer les racines pour $m = -2, +2$ et $+5$.

2° Pour quelles valeurs de m a-t-elle une racine double ? La calculer.

3° On suppose que $x' = 11$. Calculer les valeurs de m et de x'' correspondantes.

4° Calculer les racines pour $m = \frac{7\,t - 3}{t + 1}$. Pour quelles valeurs de t a-t-on des racines ? Exprimer t en fonction de m et en déduire les valeurs de m pour lesquelles l'équation proposée a des racines.

76. Soit l'équation : $\frac{3}{x + 2m} + \frac{2}{x + m} = 1$.

1° Le nombre m étant donné d'une manière quelconque, montrer qu'elle a toujours deux racines distinctes x' et x'' (*on pourra poser* $m = k + 1$).

2° De combien de manières peut-on choisir m de façon qu'une des racines ait une valeur α donnée ?

3° Étudier le cas où l'on donne à x' la valeur 5.

— Résoudre mentalement les équations :

77. $x^2 - 6\,x + 5 = 0$.

78. $x^2 - 15\,x + 56 = 0$.

79. $x^2 - 13\,x + 42 = 0$.

80. $x^2 + 16\,x + 63 = 0$.

81. $x^2 + 4\,x - 77 = 0$.

82. $x^2 - 5\,x - 150 = 0$.

83. $x^2 + 22\,x + 121 = 0$.

84. $x^2 - 40\,x + 111 = 0$.

85. $x^2 - 17\,x + 70 = 0$.

86. $x^2 - 16\,x + 55 = 0$.

87. $x^2 + 17\,x + 72 = 0$.

88. $x^2 + 2\,x - 63 = 0$.

89. $x^2 - (a + b)\,x + ab = 0$.

90. $x^2 - 2\,ax + a^2 - b^2 = 0$.

91. $2\,x^2 - 17\,x + 30 = 0$.

92. $2\,x^2 - 3\,x - 35 = 0$.

93. $3\,x^2 + 13\,x + 14 = 0$.

84. $4\,x^2 + 5\,x - 21 = 0$.

95. $5\,x^2 - 14\,x + 8 = 0$.

96. $6\,x^2 - 7\,x - 20 = 0$.

97. $7\,x^2 + 26\,x + 15 = 0$.

98. $15\,x^2 + 4\,x - 4 = 0$.

— Trouver *a priori* une des racines des équations suivantes et calculer l'autre :

99. $4\,x^2 - 11\,x + 7 = 0$.

100. $7\,x^2 + 23\,x + 16 = 0$.

101. $5\,x^2 + 26\,x - 31 = 0$.

102. $9\,x^2 - 22\,x - 31 = 0$.

103. $\frac{x}{a} - \frac{b}{x} = \frac{m}{a} - \frac{b}{m}$.

104. $\frac{m}{x - a} + \frac{n}{x - b} = \frac{m}{b} + \frac{n}{a}$.

105. $(b - c)\,x^2 + (c - a)\,x + (a - b) = 0$.

106. $a\,(b - c)\,x^2 + b\,(c - a)\,x + c\,(a - b) = 0$.

107. $(m - a)\,(b - c)\,x^2 + (m - b)\,(c - a)\,x + (m - c)\,(a - b) = 0$.

108. $2abx^2 - (a+b)^2 x + a^2 + b^2 = 0$.

— Calculer deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P.

109. S = 29; P = 198.

110. S = − 33; P = 266

111. S = 130; P = 4 225.

112. S = 41; P = − 1 386

113. S = — 117; P = − 2 430.

114. S = − 152; P = 5 695.

115. Soit l'équation : $(m+3)x^2 - m(m+5)x + 2m^2 = 0$.

1° Montrer que cette équation admet la racine $x' = m$. Calculer l'autre racine x''.

2° Pour quelles valeurs de m a-t-on : $x' = x''$?

3° Retrouver ces résultats en calculant le discriminant et en résolvant l'équation.

116. Deux nombres variables x et y ont pour somme $x + y = 2m$ et pour différence

$$x - y = 2p.$$

1° Calculer x et y et leur produit $z = xy$ en fonction de m et p.

2° La somme $2m$ est constante. Pour quelle valeur de p, le produit z est-il maximum ? Quelles sont alors les valeurs de x et y ?

3° La différence $2p$ est constante. Pour quelle valeur de m, le produit z est-il minimum ? Quelles sont alors les valeurs de x et y ?

117. 1° Pour quelle valeur de x la fonction $y = (x+3)(5-x)$ est-elle maximum ? Trouver ce maximum.

2° Pour quelle valeur de x la fonction $z = (x+3)(x-5)$ est-elle minimum ? Trouver ce minimum.

118. On considère la fonction $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}$, dans laquelle x est positif.

1° Montrer que cette fonction admet un minimum que l'on calculera ainsi que la valeur de x correspondante.

2° On désigne par m la différence $\frac{x}{2} - \frac{18}{x}$. Montrer que l'on a $y^2 = m^2 + 36$ et retrouver ainsi la valeur du minimum de y et la valeur de x correspondante.

— Étudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines des équations suivantes :

119. $x^2 - 4x + m = 0$.

120. $x^2 - 2mx + 9 = 0$.

121. $x^2 - 2mx + 3m = 0$.

122. $mx^2 - 3x + m = 0$.

123. $x^2 - (3m-2)x + 4 = 0$.

124. $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$.

125. $x^2 - 2mx + (m-3)^2 = 0$.

126. $mx^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$.

— Calculer en fonction des coefficients a, b et c de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ les expressions suivantes :

127. $(5x' - 3x'')(5x'' - 3x')$

128. $(x'-2)^3 + (x''-2)^3$

129. $\frac{1}{x'^2 - x''} + \frac{1}{x''^2 - x'}$

130. $\frac{x'}{x'' - 3x} + \frac{x''}{x' - 3x''}$

131. $\frac{x'-2}{x''-3} + \frac{2-x''}{3-x'}$

132. $\frac{x'^3 - x''^3}{x'^2 - x''^2}$

— Déterminer m de façon que les équations suivantes aient des racines satisfaisant à la relation indiquée.

133. $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$ Relation : $(4x' + 1)(4x'' + 1) = 18$.

134. $mx^2 - (m - 4)x + 2m = 0$ $2(x'^2 + x''^2) = 5x'x''$.

135. $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ $4(x'^2 + x'^2) = 5x'^2x''^2$.

136. $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 = 0$ $3x'x'' - 5(x' + x'') + 7 = 0$.

137. $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$ $16(x' + x'')^2 = 49x'^2x''^2$.

138. Soit l'équation : $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$.

1° Montrer que le discriminant Δ' est égal $(m - 1)(m - 2)$. Étudier son signe et en déduire, suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des racines x' et x'' de l'équation.

2° Déterminer m de façon que l'on ait : $x'^2 + x''^2 = x'x'' + 4$.

3° Former l'équation en X admettant pour racines $2x' - 3x''$ et $2x'' - 3x'$. En déduire les valeurs de m pour lesquelles on a : $2x' - 3x'' = 1$.

139. On considère l'équation : $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$.

1° Étudier l'existence et le signe des racines x' et x''.

2° Calculer les racines pour $m = -\frac{7}{4}$; 1 et 7.

3° On suppose $x' = -3$. Calculer la valeur de m et celle de x''.

4° Établir la relation indépendante de m qui lie les racines lorsqu'elles existent.

140. 1° Discuter, suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des racines x' et x'' de l'équation : $(m + 2)x^2 - (m + 4)x + 2 - m = 0$.

2° Établir la relation indépendante de m qui existe entre x' et x''. Retrouver à l'aide de cette relation les valeurs des racines doubles.

3° Calculer m pour que l'on ait : $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{1}{5}$.

TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

40. Définitions. — ***On appelle trinôme réel du second degré en x, tout polynôme f(x) de la forme :***

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathrm{R} \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

Les réels a, b, c désignent les coefficients constants du trinôme et x en est la variable dans R. Les racines x' et x'' du trinôme sont les racines de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ et le *discriminant* $\Delta = b^2 - 4\,ac$ est celui du trinôme $f(x)$ ou de l'équation $f(x) = 0$. Quel que soit $x \in \mathrm{R}$, le trinôme $f(x)$ prend une valeur numérique réelle de signe déterminé ou nulle.

41. Factorisation et signe du trinôme. — Le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut (nº 25) s'écrire :

$$\boxed{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]} \qquad (1)$$

1er cas : $\Delta = b^2 - 4\,ac < 0$. — Le trinôme n'a pas de racines réelles. Il ne peut être factorisé sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ sinon il admettrait pour racines α et β. *Il est indécomposable sur* R. L'expression entre crochets est la somme du carré $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ et de l'expression $\frac{4\,ac - b^2}{4a^2} > 0$. Elle est donc positive quel que soit x et le trinôme $f(x)$ est toujours du signe de a, coefficient de x^2.

2e cas : $\Delta = 0$. — La formule (1) se réduit à : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Le trinôme admet la racine double : $x' = -\frac{b}{2a} \implies \boxed{f(x) = a(x - x')^2.}$ (2)

Pour toute valeur de x différente de x' l'expression $(x - x')^2$ est positive et $f(x)$ est du signe de a.

3e cas. $\Delta > 0$. — On peut alors écrire (nº 25) :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Le trinôme admet deux racines réelles distinctes x' et x'' telles que

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et il s'écrit :

$$\boxed{f(x) = a(x - x')(x - x'').} \qquad (3)$$

En supposant $x' < x''$ on obtient :

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$x - x'$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$x - x''$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$(x - x')(x - x'')$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

On voit donc que $f(x)$ est du signe de a, pour $x < x'$ ou pour $x > x''$. Il est du signe opposé à celui de a pour $x' < x < x''$. On en déduit que :

42. Règle. — 1° ***Si le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ n'a pas de racines réelles, il est du signe de a coefficient de x^2, quel que soit $x \in$ R.***

2° ***Si le trinôme a une racine double, il est du signe de a pour toute valeur de x différente de sa racine.***

3° ***Si le trinôme a deux racines réelles distinctes, il est du signe de a pour toute valeur de x extérieure aux racines et du signe opposé à celui de a pour toute valeur de x comprise entre les racines.***

Il suffit de se rappeler que :

Un trinôme du second degré en x est donc toujours du signe du coefficient de x^2 sauf pour les valeurs de x égales aux racines réelles ou comprises entre ces racines lorsqu'elles existent.

43. Applications.

1° $f(x) = 5x^2 + 2x + 1$ n'a pas de racines réelles ($\Delta' = -4$). Il est donc positif quel que soit x.

2° $f(z) = -4z^2 + 28z - 49$ admet une racine double $\frac{7}{2}$. Il est donc du signe de -4, soit négatif, pour toute valeur réelle de z différente de $\frac{7}{2}$.

3° $f(m) = m^2 - 2m - 35$ a deux racines -5 et $+7$. Il est positif pour $m < -5$ ou pour $m > 7$. Il est négatif pour $-5 < m < 7$:

m	$-\infty$		-5		7		$+\infty$
$f(m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4° $f(x) = (2x - 5)(x + 3)$ est un trinôme admettant -3 et $\frac{5}{2}$ pour racines. Le coefficient de x^2 est 2. Donc $f(x)$ est positif pour $x < -3$ ou pour $x > \frac{5}{2}$, négatif pour $-3 < x < \frac{5}{2}$.

5° $F = \frac{2m + 3}{5 - m}$ est du signe du trinôme $(2m + 3)(5 - m)$ admettant pour racines $-\frac{3}{2}$ et 5.

Le coefficient de m^2 étant -2 on voit que la fraction est positive pour $-\frac{3}{2} < m < 5$, négative pour $m < -\frac{3}{2}$ ou pour $m > 5$:

m	$-\infty$		$-3/2$		5		$+\infty$
F		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

44. Généralisation. — ***Tout polynôme*** $P(x)$ ***qui admet la racine*** $x = \alpha$ ***est divisible par*** $(x - \alpha)$ ***et s'écrit :*** $P(x) = (x - \alpha)\, Q(x)$.

Soit par exemple : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$P(\alpha) = 0 \iff 0 = a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$

Par différence : $P(x) = a(x^3 - \alpha^3) + b(x^2 - \alpha^2) + c(x - \alpha)$.

Or : $x^n - \alpha^n = (x - \alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \ldots + \alpha^{n-2} x + \alpha^{n-1})$

Donc : $P(x) = (x - \alpha)\,[a(x^2 + \alpha x + \alpha^2) + b(x + \alpha) + c]$

Ainsi le polynôme $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$ qui admet la racine $x = 2$ se factorise sous la forme $(x) = (x - 2)(3x^2 + \lambda x + 2)$. Par identification, on trouve $\lambda = +1$, d'où :

$$f(x) = (x - 2)(3x^2 + x + 2).$$

45. Signe de $af(\alpha)$. — Soit $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ la valeur prise par le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour $x = \alpha$. Cette valeur $f(\alpha)$ est nulle si α est racine et réciproquement. Ce cas mis à part, on voit (n° 42) que :

TRINÔME : $f(x) = ax^2 + bx + c$		
1° $\Delta < 0$	Pour tout α	$af(\alpha) > 0$
2° $\Delta = 0$	Pour $\alpha \neq -\frac{b}{2a}$	$af(\alpha) > 0$
3° $\Delta > 0$	α extérieur aux racines	$af(\alpha) > 0$
	α compris entre les racines	$af(\alpha) < 0$.

46. Réciproques. — 1° ***Si*** $af(\alpha)$ ***est négatif, le trinôme*** $f(x) = ax^2 + bx + c$ ***a des racines réelles et le nombre*** α ***est compris entre ces racines.***

En effet la conclusion $af(\alpha) < 0$ exige que l'on ait $\Delta > 0$ et α compris entre les racines, car toute autre hypothèse entraîne $af(\alpha) \geqslant 0$.

2° ***Si*** $af(\alpha)$ ***est positif et si le trinôme*** $f(x)$ ***a des racines réelles le nombre*** α ***est extérieur aux racines.***

Dans le cas où $\Delta > 0$, l'hypothèse $x' \leqslant \alpha \leqslant x''$ entraîne $af(x) \leqslant 0$. Seule l'hypothèse α extérieur aux racines donne $af(\alpha) > 0$.

3° ***Si*** $f(\alpha).f(\beta)$ ***est négatif, le trinôme*** $f(x)$ ***a des racines réelles et l'un des deux nombres*** α ***ou*** β ***est compris entre ces racines.***

En effet un des produits $af(\alpha)$ ou $af(\beta)$ est positif et l'autre négatif. En supposant $\alpha < \beta$ on voit que le trinôme a des racines distinctes telles que :

$$\alpha < x' < \beta < x'' \quad \text{ou} \quad x' < \alpha < x'' < \beta.$$

On dit que les deux couples de nombres (α, β) *et* (x', x'') *se séparent.*

Ces propriétés permettent de s'assurer de la réalité des racines d'un trinôme du second degré sans en calculer le discriminant :

1° Le trinôme : $f(x) = 3x^2 - 7 + m(x - 1)$ est tel que $f(1) = -4$. Donc $af(1) = -12$. $f(x)$ admet, quel que soit m, deux racines x' et x'' vérifiant la relation : $x' < 1 < x''$.

2° Soit $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta) + m(7x - 4\alpha - 3\beta)$

On a : $f(\alpha) = 3m(\alpha - \beta)$ et $f(\beta) = 4m(\beta - \alpha)$. Donc $f(\alpha).f(\beta) = -12m^2(\beta - \alpha)^2$. En supposant $\alpha < \beta$ on voit que le trinôme a deux racines vérifiant la disposition :

$x' < \alpha < x'' < \beta$ pour $m > 0$; $\alpha < x' < \beta < x''$ pour $m < 0$ et $x' = \alpha < x'' = \beta$ pour $m = 0$.

INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

47. Forme générale. — Soient les constantes réelles a, b, c (avec $a \neq 0$). L'inéquation entière du second degré en x s'écrit sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\exists ?\, x \in \mathrm{R} \text{ tel que } ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c < 0.$$

La seconde se ramène à la première en multipliant les deux membres par -1. Il suffit d'étudier la première.

48. Étude de l'inéquation : $ax^2 + bx + c > 0$. (1)

On étudie le signe du trinôme : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1er cas : $a > 0$. L'inéquation (1) exprime que le trinôme $f(x)$ doit être du signe de a : ceci a lieu pour toutes les valeurs de x, sauf celles qui sont égales aux racines x' et x'' ou comprises entre les racines lorsqu'elles existent.

$\Delta < 0$. *L'inéquation est vérifiée quel que soit $x \in \mathrm{R}$.*

$\Delta = 0$. *L'inéquation est vérifiée pour $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.*

$\Delta > 0$. *L'inéquation est vérifiée pour les valeurs de x extérieures à l'intervalle (x', x'') donc* $\begin{cases} \text{pour } x < x' < x'' \\ \text{pour } x' < x'' < x. \end{cases}$

2e cas : $a < 0$. L'inéquation (1) exprime que $f(x)$ doit être du signe de $-a$, ce qui nécessite que $f(x)$ ait des racines réelles distinctes et que x soit compris entre ces racines.

$\Delta \leqslant 0$. *L'inéquation est impossible.*

$\Delta > 0$. *L'inéquation est vérifiée pour : $x' < x < x''$.*

49. Exemples.

1° $2x^2 + x + 3 > 0$ — ($\Delta = -23$) : vérifiée pour $\forall x \in \mathrm{R}$.

2° $-x^2 + 2x - 3 > 0$ — ($\Delta' = -2$) : impossible.

3° $(4x - 5)(2x + 3) < 0$ — vérifiée pour $-\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{5}{4}$.

4° $x^2 - 9x + 14 > 0$ — vérifiée si $x < 2$ ou $x > 7$.

5° $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 > 0$. — $\Delta' = m - 1$. Donc :

$m < 1$: Inéquation vérifiée pour $\forall x$.

$m = 1$: Inéquation vérifiée pour $x \neq 1$.

$m > 1$: Inéquation vérifiée pour $x < m - \sqrt{m-1}$ ou pour $x > m + \sqrt{m-1}$.

50. Inéquations se ramenant au second degré. — La règle donnant le signe d'un trinôme du second degré, permet comme au n° 41 d'étudier le signe d'expressions de la forme A.B.C ou $\frac{A.B}{C}$ dans lesquelles les facteurs A, B, C peuvent être du second degré. On en déduit des solutions des inéquations $A.B.C > 0$ ou $\frac{A.B}{C} > 0$.

EXEMPLE I. — *Résoudre l'inéquation :* $(x^2 + 2x - 13)^2 < (3x - 1)^2$. (1)

Cette inéquation s'écrit : $(x^2 + 2x - 13)^2 - (3x - 1)^2 < 0$.

soit : $P(x) \equiv (x^2 + 5x - 14)(x^2 - x - 12) < 0$.

Le polynôme $P(x)$ s'annule pour -7, $+2$ et -3, $+4$. D'où :

x	$-\infty$		-7		-3		2		4		$+\infty$
$x^2 + 5x - 14$		$+$	0	$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$x^2 - x - 12$		$+$	⋮	$+$	0	$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc $P(x) < 0$ pour $-7 < x < -3$ ou pour $2 < x < 4$, valeurs qui vérifient l'inéquation (1).

— Remarquons que les racines de $P(x)$ sont toutes des racines simples et entraînent un changement de signe. Comme visiblement $P(x)$ est positif pour $x > 4$, on pourrait de proche en proche en déduire le signe de $P(x)$ dans chacun des autres intervalles.

EXEMPLE II. — *Résoudre l'inéquation :* $\frac{x}{x+2} < \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 5x + 6}$. (1)

Cette inéquation s'écrit : $\frac{x(x^2 - 5x + 6) - (x + 2)(x^2 - x + 1)}{(x + 2)(x^2 - 5x + 6)} < 0$

soit : $F(x) \equiv \frac{6x^2 - 7x + 2}{(x + 2)(x^2 - 5x + 6)} > 0$

La fraction $F(x)$ change de signe pour $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, -2, 2 et 3. Elle est positive pour $x > 3$, d'où :

x	$-\infty$		-2		$1/2$		$2/3$		2		3		$+\infty$
$F(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

L'inéquation est vérifiée pour $-2 < x < 1/2$; pour $2/3 < x < 2$ ou pour $x > 3$.

COMPARAISON D'UN NOMBRE AUX RACINES D'UN TRINÔME

51. Comparaison d'un nombre aux racines d'un trinôme. — La comparaison directe d'un nombre réel α aux racines x' et x'' d'un trinôme du second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

c'est-à-dire l'étude du signe de $x' - \alpha$ et $x'' - \alpha$, conduit à des calculs laborieux sur des expressions irrationnelles lorsque le discriminant n'est pas un carré parfait. Il est possible d'effectuer cette étude sans calculer les racines du trinôme. En effet (n° 45) :

1er cas : $a.f(\alpha) < 0$, les racines x' et x'' sont réelles et : $\boxed{x' < \alpha < x''.}$

2e cas : $a.f(\alpha) = 0$ avec $a \neq 0$, le nombre α est l'une des racines et l'autre égale à $\frac{c}{a\alpha}$ ou $-\frac{b}{a} - \alpha$ se compare directement à α.

3e cas : $a.f(\alpha) > 0$ avec $\Delta \geqslant 0$, le trinôme a des racines réelles et α est extérieur aux racines, soit : $\alpha < x' \leqslant x''$ ou $x' \leqslant x'' < \alpha$.

Afin de distinguer ces deux cas, on compare α à un nombre que l'on sait compris entre les racines. On peut toujours utiliser la demi-somme $\frac{S}{2} = -\frac{b}{2a}$ car en supposant $x' < x''$:

$$x' < x'' \implies x' < \frac{x' + x''}{2} < x'' \implies x' < \frac{S}{2} < x''.$$

1° $\frac{S}{2} - \alpha > 0$ ou $\alpha < \frac{S}{2} \implies \boxed{\alpha < x' \leqslant x''.}$

2° $\frac{S}{2} - \alpha < 0$ ou $\frac{S}{2} < \alpha \implies \boxed{x' \leqslant x'' < \alpha.}$

Soit en résumé :

$f(x) = ax^2 + bx + c$		Racines x' et x''
1° $af(\alpha) < 0$		$x' < \alpha < x''$
2° $f(\alpha) = 0$		$x' = \alpha;\ x'' = S - \alpha$
3° $af(\alpha) > 0$ et $\Delta \geqslant 0$	$\frac{S}{2} - \alpha > 0$	$\alpha < x' \leqslant x''$
	$\frac{S}{2} - \alpha < 0$	$x' \leqslant x'' < \alpha$

Pour $\alpha = 0$, on retrouve les résultats du n° 34 pour le signe des racines.

52. Applications.

1° *Comparer* $+1$ *aux racines du trinôme* $f(x) = x^2 - 7x + 4$.
$af(1) = 1(1^2 - 7.1 + 4) = -2$. Le trinôme a deux racines de même signe telles que :

$$0 < x' < 1 < x''.$$

2° *Comparer* -3 *aux racines de l'équation :* $2x^2 - 3x - 25 = 0$.

Cette équation a deux racines de signes contraires (n° 26). $af(-3) = +4$, le nombre -3 est extérieur aux racines et comme -3 est inférieur à 0 qui est compris entre les racines on a la disposition : $-3 < x' < 0 < x''$.

3° *Comparer* $+6$ *aux racines de l'équation :* $x^2 - 6x + 4 = 0$.
$af(6) = +4$ et $\Delta' = +5$. L'équation a donc deux racines dont la demi-somme $+3$ est inférieure à 6. Donc : $x' < 3 < x'' < 6$.

4° *Comparer les nombres* 3 *et* 5 *aux racines de l'équation :* $3x^2 - 26x + 54 = 0$.
$af(3) = 9$ et $af(5) = -3$. L'équation a deux racines et 5 est compris entre ces racines, tandis que 3 est à l'extérieur. Donc : $3 < x' < 5 < x''$.

53. Équations paramétriques. — La comparaison ci-dessus permet d'étudier suivant les valeurs du paramètre m l'existence et la position des racines du trinôme $f(x)$ par rapport à un nombre donné α. On est conduit à étudier simultanément les signes de

$$\Delta, \; af(\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{S}{2} - \alpha.$$

Pour comparer les racines à deux nombres donnés α et β, on étudie les signes de :

$$\Delta, \quad af(\alpha), \quad af(\beta), \quad \frac{S}{2} - \alpha \quad \text{et} \quad \frac{S}{2} - \beta.$$

54. Exemple I. — *Étudier suivant les valeurs de m la position du nombre* $+3$ *par rapport aux racines de l'équation :* $x^2 - 2(m+1)x + 5m + 1 = 0$.

Calculons Δ', $af(3)$ et $\frac{S}{2} - 3$. On obtient :

$$\Delta' = (m+1)^2 - (5m+1) = m^2 - 3m = m(m-3) \qquad (0;\,3)$$

$$af(3) = 1\,[9 - 6(m+1) + 5m + 1] = -m + 4 \qquad (4)$$

$$\frac{S}{2} - 3 = m + 1 - 3 = m - 2. \qquad (2)$$

Les valeurs de m, pour lesquelles une des expressions précédentes change de signe sont donc 0, 2, 3 et 4. On peut alors établir le tableau suivant :

m	Δ'	$af(3)$	$\frac{S}{2} - 3$	CONCLUSIONS
$+\infty$				
	$+$	$-$	$+$	$x' < 3 < x''$
$+4$		0	2	$x' = 3 < x'' = 7$
	$+$	$+$	$+$	$3 < x' < x''$
$+3$	0	1	1	$3 < x' = x'' = 4$
			$+$	
$+2$	$-$	$+$	0	Pas de racines réelles.
			$-$	
0	0	4	-2	$x' = x'' = 1 < 3$
	$+$	$+$	$-$	$x' < x'' < 3$
$-\infty$				

Notons que la formule (1) du n° 41 permet d'écrire :

$$f(\alpha) = a\left[\left(\alpha - \frac{S}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta}{4} + af(\alpha) = a^2\left(\frac{S}{2} - \alpha\right)^2.$$

Il en résulte que Δ et $af(\alpha)$ ne sont jamais tous deux négatifs et qu'ils sont de signes contraires pour $\frac{S}{2} - \alpha = 0$.

55. Exemple II. — *Étudier suivant la valeur de m la position, par rapport aux nombres* 0 *et* 2, *des racines de l'équation :* $mx^2 - 2(m+1)x + m + 5 = 0$.

L'équation est du premier degré pour $m = 0$ et se réduit à $2x - 5 = 0$.

Une seule racine $x' = \frac{5}{2}$ telle que $0 < 2 < x'$.

Pour $m \neq 0$, l'équation est du second degré. On obtient :

$\Delta' = -3m + 1$; $af(0) = m(m+5)$; $af(2) = m(m+1)$; $\frac{S}{2} - 0 = \frac{m+1}{m}$

et $$\frac{S}{2} - 2 = \frac{1-m}{m}$$

Les valeurs remarquables de m sont -5, -1, 0, $\frac{1}{3}$ et 1. On obtient :

m	Δ'	$af(0)$	$af(2)$	$\frac{S}{2} - 0$	$\frac{S}{2} - 2$	CONCLUSIONS
$+\infty$						
					$-$	
1	$-$	$+$	$+$	$+$	0	Pas de racines réelles
					$+$	
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{9}$	4	2	$0 < 2 < x' = x'' = 4$
	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$0 < 2 < x' < x''$
0						Éq. du 1er degré : $2 < x' = \frac{5}{2}$
	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$x' < 0 < 2 < x''$
-1			0	0	-2	$x' < 0 < x'' = 2$
	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$x' < 0 < x'' < 2$
-5		0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$x' = 0 < x'' < 2$
	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$0 < x' < x'' < 2$
$-\infty$						

56. Remarque. — Lorsqu'on veut imposer, aux racines x' et x'' du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, une disposition donnée par rapport au nombre α ou par rapport aux deux nombres α et β, il suffit d'écrire les inégalités nécessaires et suffisantes qui entraînent l'existence des racines et cette disposition. Ainsi pour obtenir :

$x' < \alpha < x''$ écrire $af(\alpha) < 0$

$\alpha < x' \leqslant x''$ — $\Delta \geqslant 0,\ af(\alpha) > 0,\ \frac{S}{2} - \alpha > 0$

$\alpha < x' < \beta < x''$ $af(\alpha) > 0,\ af(\beta) < 0$

$\alpha < x' \leqslant x'' < \beta$ $\begin{cases} \Delta \geqslant 0,\ af(\alpha) > 0,\ af(\beta) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0, \text{ et } \frac{S}{2} - \beta < 0. \end{cases}$

EXEMPLE. — *Déterminer m pour que l'équation :* $mx^2 - 2(m+1)x + m + 5 = 0$ *ait deux racines comprises entre* 0 et 2.

Il faut et il suffit que l'on ait :

$$\Delta > 0; \quad af(0) > 0; \quad af(2) > 0; \quad \frac{S}{2} - 0 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{S}{2} - 2 < 0.$$

On est ramené à résoudre le système d'inéquations simultanées :

$$-3m + 1 > 0; \qquad m(m+5) > 0; \qquad m(m+1) > 0;$$

$$\frac{m+1}{m} > 0; \qquad \frac{-m+1}{m} < 0.$$

Les valeurs $m > \frac{1}{3}$; $-5 < m < 0$; $-1 < m < 0$ et $0 < m < 1$ sont à éliminer :

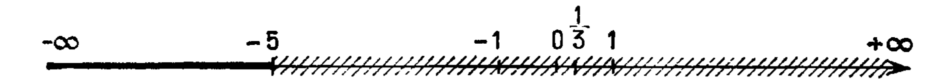


Fig. 14.

Il reste $m < -5$, ce qui est en accord avec les résultats trouvés au n° 55.

EXERCICES

— Étudier suivant les valeurs de x le signe des trinômes suivants :

141. $x^2 - 3x + 2$. **142.** $-x^2 + 2x - 1$. **143.** $x^2 - x + 1$.

144. $x^2 - 5x + 6$. **145.** $-x^2 + 6x - 9$. **146.** $x^2 + 8x + 15$.

147. $7x^2 - 12x + 5$. **148.** $3x^2 + 8x - 11$. **149.** $5x^2 - 7x - 12$.

150. $(5x + 7)(x - 4)$. **151.** $(2x - 3)(7 - 2x)$. **152.** $(3x + 1)(x + 5)$.

153. $(x + 1)^2 - 9x^2$. **154.** $(4x + 5)^2 - 49$. **155.** $x^2 - (3x + 1)^2$.

— Simplifier les expressions suivantes et étudier leur signe en fonction de x.

156. $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4x + 3}$. **157.** $\dfrac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 4x - 12}$. **158.** $\dfrac{3x^2 + 5x - 2}{3x^2 - 7x + 2}$.

159. $\dfrac{2x^2 - 9x - 5}{6x^2 - x - 2}$. **160.** $\dfrac{(6x^2 - 5x)^2 - 1}{x^2 - (2x^2 - 1)^2}$. **161.** $\dfrac{(x^2 - 7x + 12)^2 - (x - 3)^2}{(x - 3)^4 - (x - 3)^2}$.

162. $\dfrac{x + 1}{x^2 + x - 2} - \dfrac{x}{x^2 - 1}$. **163.** $\dfrac{x + 7}{x^2 - x - 6} + \dfrac{x - 10}{x^2 + x - 2} + \dfrac{x - 7}{x^2 - 4x + 3}$.

164. $\dfrac{x - 2}{2x^2 + 7x + 3} - \dfrac{2x - 1}{4x^2 + 8x + 3}$. **165.** $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 8x + 15} - \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 6x + 5} + \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x - 5}$.

— Étudier l'existence et le signe des racines des équations suivantes :

166. $x^2 - 2(m + 1)x + 3m - 5 = 0$.

167. $(m - 1)x^2 - (m - 3)x - (m + 3) = 0$.

168. $(m + 1)x^2 - 4x - 2(2m + 1) = 0$.

169. $(3m - 2)x^2 - 2(5m - 2)x + 3(2m + 1) = 0$.

170. $x^2 - 4(m+3)x + 6(m^2 - 5m + 6) = 0.$

171. $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + m - 12 = 0.$

172. $x^2 - 2(m-2)x + 2m^2 - 15m - 8 = 0.$

— Montrer, sans en calculer le discriminant, que les équations suivantes ont deux racines :

173. $(x+1)(x-3) + x^2 - 4 = 0.$

174. $(x-1)(x-4) + (x-2)(x-5) = 0.$

175. $x^2 - 9 + mx(x-5) = 0.$

176. $x(x - a + b) + (x-a)(x+b) = 0.$

177. $x(x+4) + m(x^2 - 1) = 0.$

178. $(x-m)(x-n) + a(5x - 3m - 2n) = 0.$

— Résoudre les inéquations suivantes :

179. $3x^2 - 11x + 8 > 0.$

180. $15x^2 - 14x + 3 < 0.$

181. $49x^2 - 70x + 25 > 0.$

182. $4x^2 - 19x + 5 < 0.$

183. $(2x-7)(15-3x) < 0.$

184. $(3x-1)(4x-20) > 0.$

185. $(x^2-9)(x^2+5x-6) < 0.$

186. $(x^2+5x-6)^2 - 9(x^2-4x+3)^2 > 0.$

187. $\frac{6x+2}{3x+9} + \frac{x-1}{2x+1} > 6.$

188. $\frac{7x+10}{5x+17} + \frac{25(x-2)}{10x^2+49x+51} > 0.$

— Résoudre les inéquations simultanées :

189. $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0 \\ x^2 - 8x + 15 > 0. \end{cases}$

190. $\begin{cases} x^2 - 14x + 31 > 0 \\ x^2 - 18x + 9 < 0. \end{cases}$

191. $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ 7x^2 - 31x - 20 < 0 \end{cases}$

192. $\begin{cases} (x^2 - 11x)^2 < 9(x+5)^2 \\ (x^2 - 12x + 24)^2 > 4x^2. \end{cases}$

193. $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 < 0 \\ x^2 - 8x + 15 > 0 \\ \frac{1}{x-3} + \frac{1}{9} > 0. \end{cases}$

194. $\begin{cases} (5x-19)^2 < (x-23)^2 \\ (4x-11)^2 - (2x-7)^2 > 0 \\ \frac{5}{x-1} > \frac{4}{2x-5}. \end{cases}$

— Quelles valeurs faut-il donner à m pour que les équations suivantes aient deux racines positives ?

195. $x^2 - 2(m-1)x - 3m + 7 = 0.$

196. $(m-3)x^2 + (m+3)x - m - 1 = 0.$

197. $(m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0.$

198. $x^2 - (4m+2)x + 6m^2 - 5m + 1 = 0.$

199. $mx^2 - (6m-8)x + 4m - 3 = 0.$

200. $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 2m + 5 = 0.$

— Étudier suivant les valeurs de m la position des nombres donnés par rapport aux racines des équations suivantes :

201. $x^2 + (m+4)x + m + 7 = 0$	Nombres donnés :	$+2.$
202. $mx^2 + 2(3m-2)x + 4m - 3 = 0$	—	$-1.$
203. $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + 2m = 0$	—	$+1.$
204. $(2m+1)x^2 + 2x + m + 1 = 0$	—	0 et 4.
205. $(3m-2)x^2 - 2(5m-2)x + 3(2m+1) = 0$	—	1 et 3.
206. $(m-2)x^2 - 2(m-4)x + (m-4)(m+2) = 0$	—	2 et 3.
207. $3x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 6m + 8 = 0$	—	1 et 4.
208. $(m+2)x^2 - 12x + 2(m-5) = 0$		1 et 5.

— **Déterminer m pour que les équations suivantes aient deux racines satisfaisant à la disposition indiquée.**

209. $mx^2 - 2(m-1)x - (m+1) = 0$ Disposition : $0 < x' < 2 < x''$.

210. $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ — $-1 < x' < 4 < x''$

211. $x^2 + 2(m+1)x + 1 = 0$ — $0 < x' < x'' < 3$.

212. $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 = 0$ — $1 < x' < x'' < 5$.

213. Soit l'équation : $(m-2)x^2 + 2(m-4)x + (m-4)(m+2) = 0$.

1° Discuter l'existence et le signe des racines de cette équation.

2° Quelle est la relation indépendante de m qui existe entre les racines x' et x'' ? Retrouver à l'aide de cette relation les valeurs des racines doubles.

3° Calculer en fonction de m l'expression $y = \frac{1}{x'+1} + \frac{1}{x''+1}$. Trouver les valeurs de m pour lesquelles $y = 2$.

214. Étant donnée l'équation : $x^2 - (2m+1)x + \frac{1}{4}(3m-1)(2m-1) = 0$.

1° Étudier, suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des racines.

2° Calculer m et x'' lorsque $x' = 5{,}5$.

3° Calculer l'expression : $\frac{1}{2x'-3} + \frac{1}{2x''-3}$ et déterminer m de façon que cette expression soit égale à $-\frac{2}{3}$. Vérifier.

215. Soit l'équation : $x^2 - 2(m+1)x + 3m + 2 = 0$.

1° Étudier le signe et l'existence des racines de cette équation pour chaque valeur de m.

2° Déterminer m de façon que l'équation ait deux racines réelles telles que leur somme soit égale à la somme de leurs cubes. Vérifier.

3° Établir que les racines de cette équation vérifient une relation indépendante de m. Déduire de cette relation les valeurs des racines quand elles sont égales.

216. Soit le trinôme : $y = x^2 - 2(m+1)x + 3m + 2$.

1° Étudier suivant les valeurs de m la position du nombre $+2$ par rapport aux racines de ce trinôme.

2° Montrer que ces racines vérifient une relation indépendante de m. L'établir.

3° Calculer les valeurs de m pour lesquelles la somme des racines est égale à la somme de leurs cubes.

217. Soit l'équation : $(m-2)x^2 - 2(m+3)x + 5m = 0$.

1° Étudier suivant les valeurs de m l'existence et la position des racines x' et x'' par rapport aux nombres -1 et 2.

2° Déterminer m de façon que l'on ait : $x'^2 + x''^2 = 29$.

3° Établir la relation indépendante de m qui existe entre les racines.

218. On considère l'équation : $5x^2 - 4ax + a^2 - m^2 = 0$ où a désigne un nombre positif donné.

1° Pour quelles valeurs positives de m les racines x' et x'' sont-elles réelles et quels sont leurs signes ?

2° m ayant une quelconque de ces valeurs, classer les deux nombres $\frac{a+m}{2}$ et $\frac{a-m}{2}$ par rapport aux deux racines.

219. Les racines d'une équation du second degré vérifient les relations :

$$x' + x'' + 2\,x'x'' = 0,$$
$$m\,(x' + x'') - x'x'' = 3\,m + 4.$$

1° Former cette équation.

2° Étudier, suivant les valeurs de m, les signes de ses racines.

3° Déterminer comment il faut choisir m pour que l'équation ait une seule racine comprise entre -1 et 4.

220. 1° Discuter, d'après les valeurs de m, le nombre des racines de l'équation :

$$(m - 1)\,x^2 + (2\,m - 3)\,x + m + 1 = 0$$

qui sont comprises entre -2 et $+1$.

2° Pour quelles valeurs de m l'une des racines de l'équation est-elle double de l'autre ?

221. On considère l'équation du 2e degré en x :

$$(2\,m - 1)\,x^2 - 2\,(m + 4)\,x + 5\,m + 2 = 0.$$

1° Étudier l'existence et la position des racines par rapport aux nombres -1 et $+1$.

2° Établir la relation indépendante de m qui relie les racines.

3° Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les racines vérifient la relation :

$$x'^2 + x''^2 = 2\,x'x'' + 16.$$

222. 1° Étant donnée l'équation :

$$mx^2 - 3\,(m + 2)\,x + m + 16 = 0, \qquad (1)$$

discuter, suivant les valeurs de m, l'existence des racines de cette équation et leur position par rapport aux nombres 0 et 1.

2° En désignant par x' et x'' ces racines, former l'équation (2) qui admet pour racines :

$$X' = \frac{1 - x'}{x'} \quad \text{et} \quad X'' = \frac{1 - x''}{x''}.$$

Démontrer que si l'équation (1) a des racines, il en est de même de (2) et inversement, et qu'à toute racine de l'équation (1) comprise entre 0 et 1 correspond par les formules précédentes une racine positive de (2) et réciproquement.

3° Déduire de là une seconde méthode pour retrouver les résultats de la première partie.

4e **Leçon**

ÉQUATIONS SE RAMENANT AU SECOND DEGRÉ

57. Équations de la forme : A.B.C. = 0. — Les racines de cette équation sont celles des équations :

$$A = 0; \qquad B = 0 \qquad \text{et} \qquad C = 0$$

que nous savons résoudre lorsque A, B et C sont des polynômes du premier ou du second degré. Pour résoudre l'équation $P(x) = 0$ il suffit donc de pouvoir factoriser le polynôme $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du 2e degré au plus.

EXEMPLE : $$(2x^2 - 5x + 1)^2 - (x^2 - 5x + 6)^2 = 0$$

En appliquant l'identité : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, l'équation s'écrit :

$$(2x^2 - 5x + 1 + x^2 - 5x + 6)(2x^2 - 5x + 1 - x^2 + 5x - 6) = 0.$$

Soit : $$(3x^2 - 10x + 7)(x^2 - 5) = 0.$$

Le premier facteur donne les racines : 1 et $+\frac{7}{3}$ et le second : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

58. Équations du troisième degré. — L'équation à coefficients réels du troisième degré en x s'écrit, avec $a \neq 0$:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \qquad (1)$$

Si on connaît une racine $x = \alpha$ de cette équation, le polynôme $P(x)$ placé au premier membre est tel que $P(\alpha) = 0$. Il est donc (no 44) divisible par $(x - \alpha)$ et l'équation s'écrit :

$$(x - \alpha)\left(ax^2 + \lambda x - \frac{d}{\alpha}\right) = 0.$$

En identifiant les termes en x^2 on trouve $\lambda = a\alpha + b$ et on obtient :

$$(x - \alpha)\left[ax^2 + (a\alpha + b)x - \frac{d}{\alpha}\right] = 0. \qquad (2)$$

Outre la racine α, l'équation (2) admet les racines du trinôme entre crochets. On obtient ainsi une ou trois racines réelles.

Notons que si a, b, c, d sont entiers, il faut chercher l'entier α s'il existe parmi les diviseurs entiers positifs ou négatifs de d, sans oublier ± 1.

59. Exemples. — 1° *Résoudre l'équation* : $2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = 0$.

On voit que la somme des coefficients des termes de degré pair est égale à celle des coefficients de degré impair : $-11 + 15 = 2 + 2$. Le premier membre, nul pour $x = -1$, est divisible par $(x + 1)$ et l'équation devient : $(x + 1)(2x^2 - 13x + 15) = 0$.

D'où les trois racines, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$ et $x_3 = 5$.

2° *Résoudre, sachant qu'elle admet la racine* x = 3, *l'équation* : $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$.

On vérifie que : $3^3 - 7 . 3^2 + 36 = 0$

Soit par différence : $(x^3 - 3^3) - 7(x^2 - 3^2) = 0$.

$$(x - 3)[(x^2 + 3x + 3^2) - 7(x + 3)] = 0$$

$$(x - 3)(x^2 - 4x - 12) = 0.$$

L'équation proposée admet donc, outre $x = 3$, les racines de l'équation

$x^2 - 4x - 12 = 0$, soit : $x = 6$ et $x = -2$.

60. Équation bicarrée. — L'équation bicarrée : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1) se résout en posant $x^2 = y$. Pour qu'un nombre x soit racine de l'équation (1) il faut et il suffit que le système :

$$\begin{cases} ay^2 + by + c = 0 & (2) \\ x^2 = y & (3) \end{cases}$$

admette une solution en x et y. L'équation (2) est dite *équation résolvante* de l'équation (1).

A toute racine réelle positive y de l'équation (1) correspondent deux racines réelles opposées $\pm\sqrt{y}$ de l'équation bicarrée. Le nombre de ces racines dépend donc du nombre des racines réelles positives (ou nulles) de l'équation résolvante.

61. Exemples.

1° $4x^4 - 109x^2 + 225 = 0$.

L'équation résolvante : $4y^2 - 109y + 225 = 0$ admet $y' = \frac{9}{4}$ et $y'' = 25$.

$$x^2 = \frac{9}{4} \Longrightarrow x = \pm\frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad x^2 = 25 \Longrightarrow x = \pm 5.$$

D'où les 4 racines réelles : $+\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $+5$ et -5 pour l'équation bicarrée.

2° $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0$.

L'équation résolvante $3y^2 - 22y - 45 = 0$ admet $y' = -\frac{5}{3}$ et $y'' = 9$

$x^2 = -\frac{5}{3}$ est impossible dans R. Il reste $x^2 = 9 \Longrightarrow x = \pm 3$.

Donc 2 racines réelles $+3$ et -3 pour l'équation proposée.

3° $x^4 + 17x^2 + 52 = 0 \Longrightarrow y^2 + 17y + 52 = 0$.
Soit $y' = -4$, $y'' = -13$. Équation en x impossible dans R.

4° $2x^4 - x^2 + 1 = 0$. L'équation résolvante n'a pas de racines réelles. Il en est de même de l'équation bicarrée.

62. Équations irrationnelles. — Lorsqu'une équation contient l'inconnue sous un ou plusieurs radicaux, on élimine ceux-ci en les isolant successivement dans un membre de l'équation, puis en élevant au carré les deux membres de l'équation. Rappelons que :

Lorsqu'on élève au carré les deux membres de l'équation $A = B$, ***on introduit les solutions de l'équation*** $A = -B$ ***étrangères à l'équation initiale.***

Il faut, par conséquent, vérifier si les racines de l'équation entière obtenue après élimination des radicaux satisfont ou non à l'équation irrationnelle initiale. Toutefois :

Les racines de l'équation : $A = \sqrt{B}$ ***sont celles de l'équation :*** $A^2 = B$ ***pour lesquelles :*** $A \geqslant 0$.

Il est inutile de vérifier, pour une telle racine, la condition : $B \geqslant 0$ car puisque l'on a : $B = A^2$, cette condition est nécessairement remplie.

63. Exemples. 1° *Résoudre :* $2x - 3 = \sqrt{2x^2 + 9}$. (1)

En élevant au carré on obtient l'équation résolvante :

$$(2x - 3)^2 = 2x^2 + 9 \Longleftrightarrow 2x(x - 6) = 0. \qquad (2)$$

Cette dernière admet pour racines 0 et 6. La condition $2x - 3 \geqslant 0$ est vérifiée pour $x = 6$, mais ne l'est pas pour $x = 0$. *Seule* $x = 6$ *est solution de l'équation* (1).

On vérifie aisément que $x = 0$ serait racine de l'équation : $2x - 3 = -\sqrt{2x^2 + 9}$ qui conduit à la même équation résolvante (2).

2° *Résoudre :* $\sqrt{4x + 1} = 1 + \sqrt{3x + 4}$. (1)

On obtient par élévation au carré : $4x + 1 = 1 + 3x + 4 + 2\sqrt{3x + 4}$.

D'où : $x - 4 = 2\sqrt{3x + 4} \Longrightarrow x^2 - 8x + 16 = 4(3x + 4)$.

Soit finalement : $x^2 - 20x = 0$: racines 0 et 20.

On vérifie que : $x = 20$ est seule racine de l'équation proposée (1) car : $\sqrt{81} = 1 + \sqrt{64}$.

Par contre $x = 0$ serait racine de : $\sqrt{4x + 1} = \sqrt{3x + 4} - 1$ car : $\sqrt{1} = \sqrt{4} - 1$.

3° *Résoudre l'équation :* $\sqrt{2x + 11} = \sqrt{2x - 13} + \sqrt{2(x + 1)}$. (2)

On obtient de même : $2x + 11 = 2x - 13 + 2x + 2 + 2\sqrt{(2x - 13)(2x + 2)}$.

Soit : $-2x + 22 = 2\sqrt{4x^2 - 22x - 26} \Longleftrightarrow -x + 11 = \sqrt{4x^2 - 22x - 26}$.

Puis : $x^2 - 22x + 121 = 4x^2 - 22x - 26$.

Soit : $3x^2 - 147 = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 49 = 0 \Longleftrightarrow (x - 7)(x + 7) = 0$ dont les racines sont $+7$ et -7.

La racine $x = 7$ est la solution de l'équation proposée dans R car : $\sqrt{25} = \sqrt{1} + \sqrt{16}$.

Par contre pour $x = -7$ tous les radicandes sont négatifs et l'équation (2) est impossible dans R.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

64. Principes de résolution. — Pour résoudre un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues x, y, z, on utilise les procédés de *combinaison linéaire*, de *substitution* ou de *changements d'inconnues* afin de le ramener à une équation à une seule inconnue.

La résolution de cette dernière permet alors d'obtenir, pour chaque racine trouvée, les valeurs correspondantes des autres inconnues.

65. Exemple. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 & (1) \\ 2x^2 - 3xy + y^2 - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ce système équivaut à :
$$\begin{cases} y = \dfrac{3x-5}{2} & (3) \\ 2x^2 - 3x\left(\dfrac{3x-5}{2}\right) + \left(\dfrac{3x-5}{2}\right)^2 - 4 = 0. & (4) \end{cases}$$

L'équation (4) se réduit à : $x^2 - 9 = 0$, d'où $x = +3$ ou -3. (1)

L'équation (3) donne pour $x = 3$; $y = 2$ et pour $x = -3$, $y = -7$. (2)

D'où les deux solutions : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -3 \\ y = -7. \end{cases}$

66. Systèmes de deux équations symétriques en x et y. — Lorsque les deux expressions $F(x, y)$ et $G(x, y)$ sont symétriques en x et y, la résolution du système $F = 0$, $G = 0$ se simplifie en posant $x + y = S$ et $xy = P$. On obtient un nouveau système en S et P (nº 36). A toute solution de ce système on adjoint l'équation : $X^2 - SX + P = 0$ qui lorsqu'elle a des racines réelles X' et X'', conduit aux deux solutions du système initial :

$$\begin{cases} x = X' \\ y = X'' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = X'' \\ y = X' \end{cases}$$

67. Exemple. — *Résoudre le système :*

$$\text{(I)} \begin{cases} 3(x^2 + y^2) - 5xy - 225 = 0 & (1) \\ xy - 6(x + y) = 0. & (2) \end{cases}$$

L'élimination de x ou y conduirait à une équation du 4[e] degré, non remarquable. Posons :

$$x + y = S \quad \text{et} \quad xy = P.$$

On obtient le nouveau système :

$$\begin{cases} 3(S^2 - 2P) - 5P - 225 = 0 \\ P - 6S = 0 \end{cases} \iff \text{(II)} \begin{cases} 3S^2 - 11P - 225 = 0 & (3) \\ P = 6S & (4) \end{cases}$$

En substituant $P = 6S$ dans l'équation (3), on obtient :

$$3S^2 - 66S - 225 = 0 \iff S^2 - 22S - 75 = 0 \quad (5)$$

Cette équation admet pour racines 25 et — 3 et d'après (4), le système II admet les deux solutions:

$$\begin{cases} S = 25 \\ P = 150 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S = -3 \\ P = -18. \end{cases}$$

x et y sont donc les racines de l'une ou l'autre des équations :

$X^2 - 25X + 150 = 0$ racines : 10 et 15
$X^2 + 3X - 18 = 0$ racines : — 6 et 3.

D'où, les quatre solutions du système (1) :

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -6. \end{cases}$$

68. Remarque. — Un système non symétrique peut le devenir grâce à un changement d'inconnues. Ainsi en posant : $y = -z$, le système :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - (x^2 + y^2) = 16 \\ x - y + xy = 5 \end{cases} \quad \text{s'écrit :} \quad \begin{cases} x^3 + z^3 - (x^2 + z^2) = 16 \\ x + z - xz = 5. \end{cases}$$

Le nouveau système est symétrique en x et z.

69. Application. — *Déterminer m pour que les racines de l'équation en x :*

$$mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$$

vérifient la relation : $x' + 2x'' = 1.$ (1)

Associons à la relation donnée les deux relations donnant $x' + x''$ et $x'x''$:
Nous obtenons pour $m \neq 0$ un système de 3 équations à trois inconnues x', x'' et m.

$$\begin{cases} x' + 2x'' = 1 & (1) \\ x' + x'' = \dfrac{2m-2}{m} & (2) \\ x'x'' = \dfrac{3(m-2)}{m}. & (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) du 1er degré en x' et x'' donnent :

$$x' = \frac{3m-4}{m}; \quad x'' = -\frac{m-2}{m}.$$

Par substitution dans (3) :

$$-\frac{(3m-4)(m-2)}{m^2} = \frac{3(m-2)}{m} \iff (m-2)(6m-4) = 0.$$

Ce qui donne les 2 valeurs : $m' = 2$ et $m'' = \dfrac{2}{3}$.

Les racines sont : pour $m = 2$: $x' = 1$, $x'' = 0$

et pour $m = \dfrac{2}{3}$; $x' = -3$, $x'' = 2$.

Remarque. — Le problème précédent est analogue à celui du n° 37. On peut s'y ramener en remplaçant la relation (1) par la relation symétrique équivalente :

$$(x' + 2x'' - 1)(x'' + 2x' - 1) = 0$$

soit par : $$2(x'^2 + x''^2) + 5x'x'' - 3(x' + x'') + 1 = 0.$$

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

70. Définition. — ***Un problème est du second degré lorsque sa solution algébrique exige la résolution d'une équation du second degré à une inconnue.***

Le choix des inconnues, la mise en équations et la recherche des conditions supplémentaires auxquelles doivent satisfaire les inconnues, se font comme pour un problème du premier degré. Signalons que :

Dans les problèmes de nature géométrique il est très souvent avantageux de choisir une inconnue angulaire.

On ramène ensuite la résolution de l'équation ou du système trouvé à celle d'une équation unique du second degré par rapport à l'inconnue principale x.

Il est bien rare que la nature du problème, ou sa résolution, n'impose pas à l'inconnue x des conditions d'inégalité telles que : $x < \alpha$, $x > \alpha$ ou $\alpha < x < \beta$.

La discussion d'un problème du second degré conduit ainsi à l'étude de la position des racines d'un trinôme $f(x)$ par rapport à un nombre α ou à deux nombres α et β.

71. Exemple I. — *Trouver un nombre* x *sachant qu'il surpasse de* 2 *le produit de son inverse par* 15.

Le nombre x doit vérifier l'équation : $x - \dfrac{15}{x} = 2$.

Soit en supposant $x \neq 0$: $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Cette équation a deux racines 5 et — 3. Chacun de ces deux nombres est solution du problème.

72. Exemple II. — *On considère un demi-cercle de diamètre* AB = 2 R *et le rayon* OC *perpendiculaire à* AB. *Déterminer un point* M *du demi-cercle qui se projette en* H *sur* AB *et en* K *sur* OC *de façon que :* $2\,\overline{MA}^2 = 15\,\overline{MK}^2$.

Posons : $\overline{AH} = x$ (fig. 15). Nous obtenons en prenant le sens AB pour sens positif :

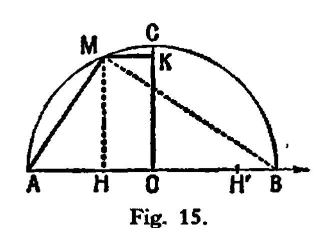


Fig. 15.

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB}.\overline{AH} = 2Rx$$

et

$$\overline{MK}^2 = \overline{HO}^2 = (R - x)^2.$$

Il faut donc que : $4Rx = 15(R - x)^2$ (1)

Réciproquement toute racine de cette équation permettra de construire le point M pourvu que : $0 \leqslant x \leqslant 2R$. L'équation (1) s'écrit :

$$15x^2 - 34Rx + 15R^2 = 0.$$

Cette équation admet les racines : $x' = \dfrac{3R}{5}$ et $x'' = \dfrac{5R}{3}$. Elles conviennent toutes deux, car :

$$0 < \frac{3R}{5} < \frac{5R}{3} < 2R.$$

73. Exemple III. — *On considère un quart de cercle de centre* O *et de rayon* R *limité en* A *et* B. *Un point* M *de ce quart de cercle se projette en* P *sur* OA. *Déterminer* OP *de façon que :* OP + 2PM = l (l *longueur donnée*).

Posons OP = x, PM = y (fig. 16). On voit que x et y doivent vérifier le système :

$$(1)\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 & (1) \\ x + 2y = l. & (2) \end{cases}$$

Réciproquement, tout couple de nombres positifs ou nuls solution de ce système conviendra, car d'après (1) on aura : $x^2 \leqslant R^2$ et $y^2 \leqslant R^2$ donc $x \leqslant R$ et $y \leqslant R$.

Éliminons y. D'après (2) : $y = \dfrac{l - x}{2}$ et l'équation (1) s'écrit :

$$x^2 + \left(\frac{l - x}{2}\right)^2 = R^2 \quad \text{ou} \quad 5x^2 - 2lx + l^2 - 4R^2 = 0. \quad (3)$$

D'autre part, les conditions $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ ou $\dfrac{l - x}{2} \geqslant 0$ donnent :

$$0 \leqslant x \leqslant l. \quad (4)$$

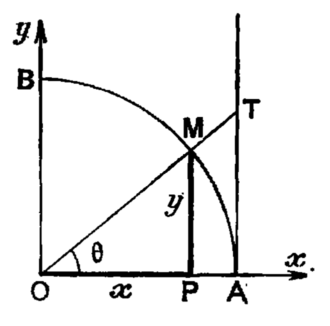


Fig. 16.

L'inconnue x doit donc vérifier :

$$\boxed{\begin{matrix} 5x^2 - 2lx + l^2 - 4R^2 = 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant l \end{matrix}}\,.$$

Discussion. — Il nous faut donc étudier suivant les valeurs de l le nombre des racines de l'équation (3) comprises entre 0 et l.

On obtient : $\Delta' = l^2 - 5\,(l^2 - 4\,R^2) = 4\,(5\,R^2 - l^2)$

$af\,(0) = 5\,(l^2 - 4\,R^2)$; $af\,(l) = 5\,[5\,l^2 - 2\,l^2 + l^2 - 4\,R^2] = 20\,(l^2 - R^2)$.

$$\frac{S}{2} = \frac{l}{5} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{S}{2} - l = -\,\frac{4\,l}{5} < 0.$$

Les valeurs remarquables de l sont donc : $R\,\sqrt{5}$, $2\,R$ et R. D'où le tableau :

l	Δ'	$af(0)$	$af(l)$	Positions des racines	Solutions
$+\infty$					
	$-$	$+$	$+$	Pas de racines	0 solution
$R\sqrt{5}$	...0...	$5\,R^2$	$80\,R^2$	$-\ 0 < x' = x'' < l\ -$	——— 1 sol. $x = \frac{R\sqrt{5}}{5}$
	$+$	$+$	$+$	$0 < x' < x'' < l$	2 sol. : $x = \frac{1}{5}\,(l \pm 2\,\sqrt{5\,R^2 - l^2})$
$2R$	....	...0...	$60\,R^2$	—— $x' = 0 < x'' < l$	——— 2 sol. $x' = 0,\ x'' = \frac{4R}{5}$
	$+$	$-$	$+$	$x' < 0 < x'' < l$	1 sol. : $x = \frac{1}{5}\,(l + 2\,\sqrt{5\,R^2 - l^2})$
R	....	$-15\,R^2$	...0...	—— $x' < 0 < x'' = l$	——— 1 sol. : $x'' = R$
	$+$	$-$	$-$	$x' < 0 < l < x''$	0 solution
0					

Remarque. — On obtient une discussion plus simple en posant $y = tx$ et en éliminant x, ce qui revient à prendre pour inconnue $\operatorname{tg}\theta = t \geqslant 0$. En effet le système (I) s'écrit :

$$\begin{cases} x^2\,(1 + t^2) = R^2 \\ x\,(1 + 2\,t) = l \end{cases} \quad \text{et conduit à :} \quad \begin{cases} (l^2 - 4\,R^2)\,t^2 - 4\,R^2\,t + l^2 - R^2 = 0 & (5) \\ t \geqslant 0 & (6) \end{cases}$$

Il suffit de rechercher, suivant les valeurs de l, le signe des racines de l'équation (5).

EXERCICES

— Résoudre les équations :

223. $(2\,x^2 + 5\,x)\,(x^2 - 8\,x + 15)\,(7\,x^2 - 27\,x - 4) = 0.$

224. $(4\,x - 7)\,(x^2 - 5\,x + 4)\,(2\,x^2 - 7\,x + 3) = 0.$

225. $(2\,x^2 - x - 1)^2 - (x^2 - 7\,x + 6)^2 = 0.$

226. $(x^3 - 4\,x^2 + 5)^2 - (x^3 - 6\,x^2 + 12\,x - 5)^2 = 0.$

— Résoudre les équations suivantes :

227. $x^3 - x^2 - 4\,x + 4 = 0.$

228. $x^3 - 4\,x^2 + x + 6 = 0.$

229. $x^3 - 6\,x^2 + 6\,x - 1 = 0.$

230. $x^3 - 3\,x^2 - 3\,x + 1 = 0.$

231. $x^3 + x^2 - 7\,x + 2 = 0.$

232. $x^3 - 4\,x^2 - 12\,x + 35 = 0.$

233. $3\,x^3 + 14\,x^2 + 6\,x - 8 = 0.$

234. $2\,x^3 - 5\,x^2 + 5\,x - 2 = 0.$

235. $x^3 - 10\,x^2 + 31\,x - 30 = 0.$

236. $6\,x^3 - 29\,x^2 - 17\,x + 60 = 0.$

237. $5\,x^3 - 9\,x^2 - 30\,x + 36 = 0.$

238. $6\,x^3 + 5\,x^2 - 66\,x + 40 = 0.$

239. $x^3 - x^2\,(2\,\sqrt{5} + 3) + 3\,x\,(1 + 2\,\sqrt{5}) - 9 = 0.$

— Résoudre les équations suivantes :

240. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0.$

241. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$

242. $x^4 - 48x^2 - 49 = 0.$

243. $x^4 - 2x^2 - 3 = 0.$

244. $x^4 - (m^2 + 1)x^2 + m^2 = 0.$

245. $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0.$

246. $x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36 = 0.$

247. $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0.$

248. $x^4 - 34x^2 + 225 = 0.$

249. $x^4 - 7x^2 - 144 = 0.$

250. $4x^4 - 29x^2 + 25 = 0.$

251. $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0.$

252. $9x^4 - 4(9m^2 + 4)x^2 + 64m^2 = 0.$

253. $a^2x^4 - (m^2a^2 + b^2)x^2 + m^2b^2 = 0.$

254. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0.$

255. $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0.$

— Résoudre les équations suivantes :

256. $\sqrt{x^2 - 1} = x + 3.$

257. $1 + \sqrt{2x + 1} = 3x.$

258. $\sqrt{(4x - 7)(x + 8)} - 2x = 3.$

259. $\sqrt{3x^2 + 2x + 4} = 2 - x.$

260. $x + 2\sqrt{x^2 - 11} = 16.$

261. $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 2} = 2.$

262. $x - \sqrt{4x - 19} = 4.$

263. $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x - 4} = 3.$

264. $2x + \sqrt{(x + 1)(x - 5)} = 18.$

265. $\sqrt{10x - 3} + \sqrt{5x - 3} = 5\sqrt{3}.$

266. $\sqrt{x^2 - 6x + 13} = x - 1.$

267. $\sqrt{x - 5} = \frac{x}{3} - 5.$

268. $x - \sqrt{2x + 1} = 7.$

269. $5 - x = \sqrt{25 - 4x^2}.$

270. $\sqrt{2 + \sqrt{3x - 5}} = \sqrt{x + 1}.$

271. $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{5 - x} - \sqrt{3 - 2x}.$

272. $\sqrt{28 + 2x} = \sqrt{21 + x} + 1.$

273. $\sqrt{4x - 7} + \sqrt{x} = \sqrt{11x - 19}.$

274. $2x^2 = 5x - \sqrt{x^2 + 20x - 4}.$

275. $\sqrt{7x + 50} - \sqrt{5x + 6} = \sqrt{8x}.$

276. $2x^2 - 3 = 2x - 3\sqrt{2x^2 - 2x + 1}.$

277. $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5 - 8x} = \sqrt{4x + 7}.$

278. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{2x + 4\sqrt{2}}.$

279. $\sqrt{x - 3} + \sqrt{7 - x} = \sqrt{x + 1}.$

280. $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1.$

281. $x + \sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{3x^2 - 11}.$

282. $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{6x + 7}.$

283. $\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = 2.$

284. $\dfrac{x - 1 - \sqrt{2x + x^2}}{\sqrt{2x + x^2}} = \dfrac{\sqrt{x - 2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$

285. $\dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{1 + x}} + \dfrac{1 + x}{1 + \sqrt{1 - x}} = 1.$

— Résoudre les systèmes d'équations suivants et discuter s'il y a lieu.

286. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x^2 - y^2 = 40. \end{cases}$

287. $\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ (x - 2)(y - 3) = 18. \end{cases}$

288. $\begin{cases} 2x + 3y = 50 \\ (x - y)^2 = 25. \end{cases}$

289. $\begin{cases} 7x - 4y = 13 \\ (x + y)^2 = 256. \end{cases}$

290. $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ x + y = m. \end{cases}$

291. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0. \end{cases}$

292. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 24 \\ x + y = 8. \end{cases}$

293. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6. \end{cases}$

294. $\begin{cases} y^2 = x^2 - 3x + 2 \\ y - m(x - 1) = 0. \end{cases}$

295. $\begin{cases} \dfrac{x}{x - a} + \dfrac{y}{y - b} = 2. \\ ax + by = 2ab. \end{cases}$

296. $\begin{cases} 5y - 3x = -111xy \\ 2y + 5x = 30xy. \end{cases}$

297. $\begin{cases} 5x(x - 8) - 3y(y + 1) = -111 \\ 2x(x - 8) + 5y(y + 1) = 30. \end{cases}$

— **Résoudre les systèmes suivants :**

298. $\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 25 \\ 2x^2 - 15xy + 18y^2 = -10. \end{cases}$

299. $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 5x + y - 2 \\ x^2 + 3xy + y^2 + 6x + 2y = 3. \end{cases}$

300. $\begin{cases} xy + y + 4 = 0 \\ xy - 4x + 2y - 10 = 0. \end{cases}$

301. $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 - 8x = 0 \\ 8x^2 - 9xy + 3y^2 - 8x + 8 = 0. \end{cases}$

— **Résoudre et discuter, s'il y a lieu, les systèmes suivants :**

302. $\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 = 89. \end{cases}$

303. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^3 + y^3 = 133. \end{cases}$

304. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy = x + y + 17. \end{cases}$

305. $\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 42 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 145. \end{cases}$

306. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^3 + y^3 = 3(x + y). \end{cases}$

307. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 152 \\ x^2 - xy + y^2 = 19. \end{cases}$

308. $\begin{cases} x^3 - y^3 = a^3 \\ x^2 + xy + y^2 = b^2. \end{cases}$

309. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ x^2 - xy + y^2 = b^2. \end{cases}$

310. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133. \end{cases}$

311. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4) \\ xy = a^2 - b^2. \end{cases}$

312. $\begin{cases} x^4 - x^2y^2 + y^4 = 117 \\ x^2 - xy\sqrt{3} + y^2 = 3. \end{cases}$

313. $\begin{cases} x^3 = ax + by \\ y^3 = ay + bx. \end{cases}$

314. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy = y^2 - 3x - 1 \\ 2y^2 - 3xy = x^2 - 3y - 1. \end{cases}$

315. $\begin{cases} \dfrac{x + y}{a + b} = \dfrac{ab - 1}{xy - 1} \\ xy - ab = x + y - a - b. \end{cases}$

— **Résoudre les systèmes suivants :**

316. $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ x + y + z = 2 \\ xy - z = 1. \end{cases}$

317. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 5x - 3y = 1 \\ xy - (x + y) + 1 = 0. \end{cases}$

318. $\begin{cases} x + y = z - 3 \\ xy = 10 - z \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

319. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + z^2 + 5 = 0 \\ (x - 2)(y - 2) + 4 = 0. \end{cases}$

320. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \end{cases}$

321. $\begin{cases} 4xy = x + y \\ 7yz = y + z \\ 5xz = z + x. \end{cases}$

322. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$

233. $\begin{cases} x(y + z) = a \\ y(z + x) = b \\ z(x + y) = c. \end{cases}$

324. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 39 \\ y^2 + yz + z^2 = 201 \\ z^2 + zx + x^2 = 147. \end{cases}$

325. $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ xy + yz + zx = 47 \\ xyz = 60. \end{cases}$

326. $\begin{cases} 36x^2 = 9y^2 = 4z^2 \\ x + y + z = 6. \end{cases}$

327. $\begin{cases} ax^2 = by^2 = cz^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{d}. \end{cases}$

— Déterminer le paramètre m pour que les racines des équations suivantes vérifient la relation indiquée :

328. $x^2 + (3m + 2)x + m^2 - 2m - 5 = 0.$ Relation : $x' - 3x'' = 0.$

329. $x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + 7 = 0.$ $3x' + 5x'' = 34.$

330. $(m - 4)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0.$ $x'x'' + 2x' + 1 = 0.$

331. $(2m - 1)x^2 - 4x + 2(2m + 1) = 0.$ $x' + 2x'' - 8 = 0.$

332. $x^2 - (m - 3)x + 4m + 8 = 0.$ $3x' + x'' = 37.$

333. $mx^2 - 2(m + 5)x + m + 4 = 0$ $x'x'' = x' - 4x''.$

334. Résoudre le système :

$$(y + 1)(z - 1) = 48; \quad (z + 1)(x - 1) = 20; \quad (x + 1)(y - 1) = 16.$$

335. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 = 29 \\ xy = 6. \end{cases}$$

Déduire du résultat que l'on peut mettre $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}}$ sous la forme $x + y\sqrt{5}$.

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

— On donne un demi-cercle de diamètre AB = 2 R. Un point M de ce demi-cercle se projette en H sur AB; l désignant une longueur donnée, déterminer l'angle BAM = θ dans les cas suivants, discuter et rechercher s'il y a lieu une construction géométrique.

336. $2\,AH + BM = 4R.$

337. $AH + AM = \dfrac{3R}{2}.$

338. $AH + 2\,BH + AM = \dfrac{16R}{9}.$

339. $2\,AH + 3\,BH + BM = \dfrac{128R}{25}.$

340. $AH - BH = MH.$

341. $2\,AH - BH + MH = 4R.$

342. $3\,AH + 4\,BH = 7R.$

343. $AH + MH = \dfrac{6R}{5}.$

344. On donne un quart de cercle OAB de centre O, de rayon R, en sorte que AOB est un angle droit; on projette orthogonalement sur OA un point M de l'arc AB; P étant la projection du point M. On demande de déterminer ce point de façon que OP = AM. On prendra pour inconnue OP = x. Après avoir résolu ce problème on donnera une construction géométrique.

345. Trouver deux nombres x et y jouissant de la propriété que chacun d'eux ait pour valeur le résultat de la substitution de celle de l'autre à t dans l'expression $\dfrac{7 - t}{1 + 2t}$ et aussi bien dans cette autre expression $\dfrac{4 + 2t}{-2 + 5t}$.

346. On considère un cercle de centre O et de diamètre AB = 4. On désigne par C et D les milieux respectifs de OA et de OB, par M un point quelconque du cercle et H sa projection sur AB. On pose CM = x et DM = y.

1° Montrer que l'on a, quelle que soit la position du point M : $x^2 + y^2 = 10$.

2° Calculer x et y, sachant que $x + y = \dfrac{17}{4}$.

3° Quelle position doit occuper le point M sur le cercle pour que l'on ait HM = $\sqrt{3}$?

347. Soit un triangle ABC rectangle en A dont les côtés sont CA $= b$, AB $= c$. Trouver sur l'hypoténuse un point D tel que le produit des perpendiculaires DE.DF abaissées de ce point sur les deux autres côtés AB et AC ait une valeur donnée $\frac{6}{25}bc$.

On posera DE $= x$ et on calculera la valeur de x.

348. ABC est un triangle équilatéral de côté a. Menons par B et C, perpendiculairement au plan ABC, les droites Bx et Cy sur lesquelles nous choisissons un même sens positif, et marquons sur ces deux droites les points M et P définis par les mesures algébriques $\overline{BM} = x$, $\overline{CP} = y$.

1° Calculer les côtés du triangle AMP.

2° Quelle relation doit lier x et y pour que l'angle MAP soit droit ?

3° Calculer x et y, sachant que l'angle MAP est droit et que : $x + y = \frac{7a}{6}$.

— On considère sur un demi-cercle de diamètre AB $= 2$R, un point M qui se projette orthogonalement en H sur AB, en K sur la tangente Bz au point B. La longueur l ou le rapport k étant donnés, déterminer la position du point M et discuter dans les cas suivants :

349. AH + MH $= l$.

350. AH − MH $= l$.

351. MA + MB $= l$.

352. MA − MB $= l$.

353. MA + MK $= l$.

354. MA − MK $= l$.

355. MH + MK $= l$.

356. MH − MK $= l$.

357. MA $= k$ MK

358. $\overline{MA}^2 + k\,\overline{MH}^2 = l^2$

359. Par un point A situé dans un angle droit, on mène une sécante BAC qui détermine sur les côtés de l'angle deux segments OC $= x$, OB $= y$. Déterminer cette sécante de manière que l'on ait : $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{c^2}$. On désignera par a et b les distances du point A aux côtés Ox et Oy.

360. Trouver sur une demi-circonférence de centre O, limitée au diamètre AB, un point D tel que si l'on mène DE parallèle à AB et qu'on joigne D et A la somme des cordes AD et DE soit égale à une longueur donnée l. Discuter.

Nota. — On distinguera deux cas de figure suivant que l'arc AB est inférieur ou supérieur au quart de circonférence.

361. Dans un cercle donné, tracer une corde AB telle que la différence entre sa longueur et sa distance OH au centre ait une valeur donnée l. Inconnue, OH $= x$. Discuter en supposant d'abord l positif, puis l négatif. Solution géométrique.

362. Trouver sur un demi-cercle de diamètre AB $= 2$ R un point M tel que, si l'on abaisse la perpendiculaire MP sur AB, on ait : AP + 2 PM $= l$. (l étant une longueur donnée.) Discuter. Solution analytique et construction géométrique.

363. On donne dans un cercle de rayon R deux rayons perpendiculaires OA, OB. Trouver sur le quadrant AMB un point M tel qu'en menant de M les perpendiculaires MP sur OA, MQ sur OB on ait MP + MQ $= m$R, m désignant un nombre positif donné. Inconnues : MP $= x$, MQ $= y$. Discuter géométriquement. Pour cela montrer qu'en prolongeant OP au-delà de P d'une longueur PI convenablement choisie, on peut déduire du point I une construction simple du point cherché.

364. Soit un angle de sommet O ayant pour mesure 60°; sur un côté on porte une longueur OA $= 4a$ et du point A on abaisse la perpendiculaire AB sur l'autre côté. Soit P le milieu de OB. Un point variable M du segment OA est déterminé par OM $= x$; et l'on désigne par H sa projection sur OB.

1° Calculer OB, OH, MH et la somme $\overline{MP}^2 + \overline{MB}^2$.

2° Déterminer x de façon que : $\overline{MP}^2 + \overline{MB}^2 = k^2$. (1)

Discutet suivant les valeuts du patamètte k.

3° Construire géométriquement le point M tépondant à la condition (1) et retrouvet la discussion ptécédente.

365. 1° Soit ABCD un téttaèdte téguliet ($AB = l$); démontret que les arêtes opposées AB et CD sont orthogonales.

2° Démontrer que la section du tétraèdte par le plan mené pat un point P de BC parallèlement à AB et à CD est un tectangle.

3° Calculet les côtés de ce tectangle en fonction de l et de $BP = x$. Quel doit être x pour que la section soit un carré ? Déterminet x sachant que la diagonale de ce tectangle a une longueut d. Discussion.

4° Trouvet le lieu du centte de ce tectangle.

366. On considète le quart AB d'un cetcle de centre O de rayon R. Un point M de l'arc de cetcle est défini pat la distance $AM = x$.

1° Calculer en fonction de R et x la distance MP de M au rayon OB.

2° Déterminet x de manière que : $MA + MP = k$ (k étant une longueur donnée). Discuter.

3° Pout une valeur convenable de k, l'équation du 2e degré ainsi obtenue admet une tacine double. Préciset la position de M qui lui correspond.

367. Inscrire dans un demi-cetcle un ttiangle rectangle ABC dont on connaît le périmètre ($A = 1$ dtoit).

1° On donneta une solution algébtique en calculant $AB = x$, $AC = y$, connaissant $BC = 2\,R$ et le périmètre $= 2\,p$ ($p > 2\,R$). En déduire d'abotd la surface, puis la hauteut, en fonction de R et p.

Application : $R = 1, p = \sqrt{2} + 1$.

2° Donner une solution géométtique du ptoblème.

368. Soit un triangle équilatéral ABC de côté a. D'un point M de AC entre A et C, on mène la perpendiculaire à BC rencontrant le prolongement de AB en P et on joint BM.

1° Calculer $AM = x$ de manière que $MB = k.MP$, k étant un nombte donné.

Discuter en faisant variet k.

2° Construction géométrique du point M.

369. On donne un triangle ABC, rectangle en A, moitié du triangle équilatéral CBB'; on connaît l'hypoténuse $BC = 2\,a$.

1° Calculer en fonction de a les deux côtés AB et AC.

2° Déterminer un point M sur BC, situé entte B et C ou aux exttémités du segment BC, tel que, MP étant la perpendiculaire menée de M à AC, la somme des carrés des quatre côtés du trapèze BMPA soit égale au carré d'une longueur donnée ma. On posera $AP = x$, $PM = y$ et on discutera gtaphiquement l'équation en x qui en résulte.

3° Solution analytique du ptoblème en considérant x et y coordonnées de M dans un repète orthonormé xAy. En déduite la construction géométrique des solutions et la discussion géométrique.

370. On donne un angle droit XOY, le point A sut le côté OX, tel que $OA = \sqrt{3}$, le point B sur le côté OY, tel que $OB = 1$, et la demi-dtoite OZ située à l'intérieut de l'angle XOY, qui fait avec OX l'angle XOZ mesuré par α.

P étant la projection orthogonale de A sur OZ, on joint le point B. On demande :

1° de calculer à l'aide des données et de l'angle α l'expression de la somme $\overline{PO}^2 + \overline{PB}^2$;

2° de déterminer l'angle α pout que cette somme ait une valeur déterminée k. Discuter la possibilité du problème suivant les valeurs de k. Calculet l'angle α dans la cas particulier $k = 4 - \sqrt{3}$.

3° de retrouver à l'aide de constructions géométriques la solution et les tésultats de la discussion de la 2e partie.

371. Dans un triangle ABC, on donne l'angle B = 30°, le rapport $\frac{AC}{AB} = k$ et la distance d qui sépare sur BC le pied D de la bissectrice de l'angle A du pied D' de la bissectrice extérieure de l'angle adjacent à l'angle A. Calculer les trois côtés du triangle. Discuter et chercher si l'angle en C du triangle est aigu ou obtus. Même question pour l'angle A; même problème en supposant B = 150°.

372. Sur le côté BC = a d'un triangle équilatéral fixe ABC, on prend un point M variable, d'où l'on abaisse les perpendiculaires MP sur AB et MQ sur AC.

1° Trouver la relation entre AP et AQ.

2° Lieu du centre de la circonférence passant par A, P, Q.

3° Former et discuter l'équation du 2e degré ayant pour racines les longueurs AP et AQ sachant que PQ a une longueur donnée l. Construction géométrique.

373. On considère deux axes Ox et Oy faisant un angle de 45°, sur l'axe Oy, deux points fixes A et B tels que : $\overline{OA} = a$; $\overline{OB} = 2a$ et sur Ox, un point M tel que $\overline{OM} = x$.

1° Calculer x de manière que l'on ait : $3\,MB^2 + 2\,MA^2 = k\,(3\,MB^2 - 2\,MA^2)$, k désignant un nombre donné. Discuter.

2° Dans le cas où le problème admet deux solutions, montrer qu'il existe, entre les abscisses x et x_1 des points correspondants, une relation indépendante de k.
Examiner le cas où $x_1 = x_2$.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

74. Définition. — ***On appelle variable réelle tout nombre x susceptible de prendre une valeur quelconque dans l'ensemble*** R ***des réels.***

On peut établir une correspondance bijective entre l'ensemble R des réels et l'ensemble des points M d'un axe $x'x$ (orienté de gauche à droite), muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\vec{i}$ (fig. 17). C'est pourquoi on dit que tout réel x constitue *un point de la droite numérique* $x'x$.

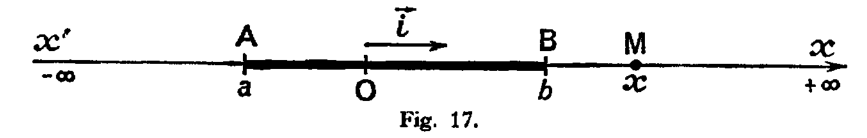


Fig. 17.

Si le point M s'éloigne indéfiniment de O sur l'axe $x'x$, son abscisse x finit par devenir, en valeur absolue, supérieure à tout nombre arithmétique A fixé à l'avance. On dit que x devient infini et on écrit : $x \longrightarrow +\infty$ si M s'éloigne à droite de O.
$x \longrightarrow -\infty$ si M s'éloigne à gauche de O.

75. Intervalles. — Deux nombres réels a et b tels que $a < b$, permettent de définir différents sous-ensembles ou domaines de R. On distingue ainsi :

1° *l'intervalle fermé ou segment :* $[a, b] \Longleftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$

2° *l'intervalle ouvert (ou intervalle) :* $]a, b[\Longleftrightarrow a < x < b$

3° *les intervalles semi-ouverts :* $\begin{cases}]a, b] \Longleftrightarrow a < x \leqslant b \\ [a, b[\Longleftrightarrow a \leqslant x < b \end{cases}$

Dans tous les cas, les points a et b sont les *bornes de l'intervalle* envisagé et $|b - a|$ est l'*amplitude* de l'intervalle. De même si $b \longrightarrow +\infty$, on définit les *demi-droites :*

$$[a, +\infty[\Longleftrightarrow x \geqslant a \quad \text{et} \quad]a, +\infty[\Longleftrightarrow x > a.$$

Tout segment ou intervalle dont le point a est un élément constitue *un voisinage du point a*. Ainsi, quels que soient les réels positifs α, β, ou ε les intervalles $[a - \alpha, a + \beta]$ et $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ sont des voisinages du point a.

Notons que la réunion ou l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a. On peut aussi définir un *voisinage à gauche* $[a - \varepsilon, a]$ ou *à droite* $[a, a + \varepsilon]$ du point a.

76. Fonction d'une variable réelle. — ***On définit une fonction réelle f de la variable réelle x, quand à tout élément x de R, on fait correspondre au plus un élément y de R.***

L'ensemble non vide $A \subseteq R$ des réels x qui ont effectivement un correspondant unique y dans $B \subseteq R$ est le *domaine de définition* de la fonction f, qui est dite définie sur A et à valeurs dans B.

On écrit : $\forall x \in A \subseteq R, \quad \exists y$ (unique) $\in B \subseteq R$ tel que $x \to y = f(x)$.

La fonction « f » définit donc une application de son domaine de définition A dans l'ensemble de réels B.

EXEMPLES. — 1° Les fonctions réelles $y = x^3 - x$, $y = 3\cos^2 x - 4 \sin x$ sont définies que que soit $x \in R$. Ces fonctions sont définies sur R.

2° La fonction réelle : $y = \sqrt{x(1-x)}$ est définie dans R pour $0 \leqslant x \leqslant 1$. Elle est donc définie sur le segment $[0, 1]$. De même $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est définie sur l'intervalle $[-1, +1[$, tandis que $y = \sqrt{x^3 - 1}$ est définie sur la demi-droite $[+1, +\infty[$.

3° La fonction $y = \sqrt{-1-x^2}$ n'est pas une fonction réelle dans R.

77. Définitions. — Lorsque la valeur de y se calcule, à l'aide d'opérations algébriques, à partir de celle de x on dit que *y est fonction algébrique* de x.

EXEMPLES : $\quad y = 2x + 3; \quad y = \dfrac{2x}{x+1}; \quad y = \sqrt{x^2 - 4}.$

Par contre les fonctions $y = \sin x$, $y = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ ne peuvent se calculer qu'à l'aide d'une table de rapports trigonométriques. Elles sont dites transcendantes.

Soit A le domaine de définition d'une fonction. Celle-ci est dite :

paire si $\forall x \in A : \quad f(-x) = f(x)$
impaire si $\forall x \in A : \quad f(-x) = -f(x)$
périodique si $\forall x \in A, \quad \exists p \in R : f(x + p) = f(x).$

Le nombre p est la période de $f(x)$.

$$y = 3x^4 + 4x^2 - 5; \qquad y = \frac{4x^2 - 7}{x^2 + 1} \text{ sont des fonctions paires.}$$

$$y = x^3 - 5x; \qquad y = \frac{2x}{x^2 - 1} \text{ sont des fonctions impaires.}$$

Nous verrons que $y = \sin x$, $y = \cos x$ admettent pour période 2π radians et que $y = \operatorname{tg} x$ admet pour période π radians.

78. Variation d'une fonction. — ***Une fonction y = f(x), définie sur un intervalle]a, b[donné, est croissante sur cet intervalle si elle varie dans le même sens que la variable x, décroissante si elle varie en sens contraire, constante si elle conserve la même valeur quel que soit x.***

Ainsi la longueur d'une corde d'un cercle est fonction croissante de la mesure de l'arc sous-tendu (inférieur à un demi-cercle), mais elle est une fonction décroissante de sa distance au centre. La fonction $y = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ est constante, égale à $+1$ lorsque x est positif, égale à -1 lorsque x est négatif.

Lorsque la variable $x \in [a, b]$ passe de la valeur initiale x_1 à la valeur finale x_2, elle subit l'accroissement $\Delta x = x_2 - x_1$. Toute fonction $y = f(x)$ définie sur le segment $[a, b]$ subit alors l'accroissement correspondant : $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$. Il résulte de la définition précédente que :

79. Théorème. — ***Une fonction $y = f(x)$ est croissante sur tout intervalle où, quels que soient x_1 et x_2, les accroissements correspondants Δx et Δy sont de même signe. Elle est décroissante sur tout intervalle où ces accroissements sont de signes différents.***

On étudie le signe du rapport : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b]; \; \frac{\Delta y}{\Delta x} \left| \begin{array}{l} \textit{positif} \Longrightarrow f(x) \;\; \textit{croissante sur } [a, b]. \\ \textit{négatif} \Longrightarrow f(x) \;\; \textit{décroissante sur } [a, b]. \end{array} \right.$$

Exemple. — Ainsi pour la fonction $y = x^2$ on a : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2$. Le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ est, quels que soient x_1 et x_2, positif pour $x \geqslant 0$, négatif pour $x \leqslant 0$. La fonction $y = x^2$ est donc décroissante sur la demi-droite $]-\infty, 0]$, croissante sur la demi-droite $[0, +\infty[$.

Une fonction qui est soit croissante, soit décroissante sur un intervalle donné est dite monotone sur cet intervalle.

Étudier la variation d'une fonction f, c'est rechercher les intervalles où la fonction est monotone (voire constante) et le sens de variation de f sur chacun de ces intervalles. Une fonction $f(x)$ croissante pour $a < x \leqslant b$, décroissante pour $b \leqslant x < c$, admet sur $]a, c[$ le maximum $f(b)$. Si cette fonction est décroissante pour $a < x \leqslant b$, croissante pour $b \leqslant x < c$, elle admet $f(b)$ pour minimum sur $]a, c[$.

LIMITES

80. Définitions. — 1° ***On dit que la variable réelle x tend vers le nombre donné a (ou admet pour limite a) lorsque la valeur absolue de la différence $x - a$ devient et reste inférieure à tout nombre réel positif ε fixé à l'avance.***

On fait tendre x vers a, si on l'astreint à vérifier, quel que soit le nombre positif arbitrairement petit ε, l'inégalité :

$$\boxed{|x - a| < \varepsilon} \quad \text{ou} \quad \boxed{a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.}$$

On écrit : $x \longrightarrow a$ (lire « x tend vers a »). Précisons que :

$x \longrightarrow a$ *à droite* (ou par valeurs supérieures) si : $a < x < a + \varepsilon$.
$x \longrightarrow a$ *à gauche* (ou par valeurs inférieures) si : $a - \varepsilon < x < a$.

On écrit parfois $x \longrightarrow a + 0$ dans le premier cas et $x \longrightarrow a - 0$ dans le second cas.

Notons que lorsque $x \longrightarrow a$, la différence $x - a$ tend vers zéro, car sa valeur absolue devient et reste inférieure à celle de tout nombre positif.

2° ***On dit que la variable réelle x, de signe donné, devient infinie si sa valeur absolue devient et reste supérieure à tout nombre réel positif arbitrairement grand A, fixé à l'avance.***

$$x \longrightarrow +\infty \quad \text{si finalement : } \quad x > A.$$

$$x \longrightarrow -\infty \quad \text{si finalement : } \quad x < -A.$$

81. Limite d'une fonction. — On dit que la fonction $f(x)$ admet le nombre b pour limite quand x tend vers a, s'il est possible de choisir x suffisamment voisin de a pour que $f(x)$ soit aussi rapproché de b qu'on le désire. D'une façon plus précise :

La fonction $y = f(x)$ admet la limite b lorsque x tend vers a, si à tout nombre positif arbitraire ε on peut faire correspondre un nombre positif α tel que la relation $|x - a| < \alpha$ entraîne $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Ainsi la fonction $y = 2x - 1$ tend vers $+ 5$ lorsque x tend vers $+ 3$ car pour obtenir $|y - 5| < \varepsilon$ il suffit de choisir x tel que $|2x - 1 - 5| < \varepsilon$

soit : $$|2x - 6| < \varepsilon \implies |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Autres exemples. — 1° La fonction $y = \frac{2x+1}{x-1}$ ou $y = 2 + \frac{3}{x-1}$ tend vers $+ 2$ par valeurs supérieures lorsque x tend vers $+ \infty$ car on obtient : $0 < y - 2 < \varepsilon$ pour tout x tel que $0 < \frac{3}{x-1} < \varepsilon$, soit pour $x - 1 > \frac{3}{\varepsilon}$ ou $x > \frac{3}{\varepsilon} + 1$.

2° Cette fonction tend vers $+ \infty$ lorsque x tend vers $+ 1$ par valeurs supérieures car pour obtenir $y > A$, nombre positif arbitraire donné, il suffit de choisir x tel que

$$\frac{3}{x-1} > A, \text{ c'est dire tel que : } 0 < x - 1 < \frac{3}{A} \text{ ou } 1 < x < 1 + \frac{3}{A}.$$

Remarque. — La fonction $f(x)$ n'est pas obligatoirement définie pour $x = a$. Il suffit qu'elle soit définie au voisinage de a pour $x > a$ ou $x < a$. C'est précisément lorsque $f(x)$ n'est pas définie pour $x = a$ qu'il importe le plus souvent d'en trouver la limite lorsque x tend vers a.

82. Opérations sur les limites. — La recherche des limites est facilitée par les ésultats suivants que nous admettrons :

Si, lorsque x tend vers x_0, les fonctions $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ admettent respectivement les limites u_0, v_0, w_0 :

1° ***La somme $u + v + w$ admet pour limite :*** $u_0 + v_0 + w_0$.

2° ***Le produit uv admet pour limite :*** $u_0 v_0$.

3° ***Si $v_0 \neq 0$, le quotient $\frac{u}{v}$ admet pour limite :*** $\frac{u_0}{v_0}$.

Si A, B, C sont des constantes la limite de Au est Au_0 et celle de la somme algébrique $Au + Bv + Cw$ est $Au_0 + Bv_0 + Cw_0$.

D'autre part u^m admet pour limite u_0^m et $\sqrt{u}$ admet pour limite $\sqrt{u_0}$.

Toute fonction algébrique $f(x)$, définie pour $x = x_0$, admet pour limite $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0.

Ainsi lorsque x tend vers $+ 4$ la fonction : $f(x) = \frac{2x - 1 + \sqrt{x^2 + 9}}{x + 2}$ admet pour limite :

$$\frac{7 + \sqrt{25}}{6} = 2.$$

— On peut dans certains cas compléter les résultats ci-dessus. Par exemple :

Si u admet pour limite $u_0 \neq 0$ tandis que v tend vers $+ \infty$, la somme $u + v$ tend vers $+ \infty$ le produit uv tend vers $+ \infty$ si u_0 est positif, vers $- \infty$ si u_0 est négatif, le quotient $\frac{u}{v}$ tend vers 0, et il en est de même de $\frac{1}{v}$. Par contre, si $v \to 0$ le rapport $\frac{u}{v}$ tend vers $\pm \infty$.

83. Applications. — 1° Le polynôme : $F(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} ... + a_{n-1}x + a_n$ se présente souvent sous la forme $\infty - \infty$ lorsque x tend vers $\pm \infty$.

Or : $$F(x) \equiv a_0\, x^n . \left(1 + \frac{a_1}{a_0\, x} + \frac{a_2}{a_0\, x^2} + ... + \frac{a_n}{a_0\, x^n}\right).$$

Lorsque x devient infini, l'expression entre parenthèses tend vers $+ 1$. Donc :

Un polynôme en x devient infini, avec le signe de son terme de plus haut degré, lorsque x tend vers $+ \infty$ ou vers $- \infty$.

On peut même ajouter que le rapport $\frac{F(x)}{a_0\, x^n}$ tend vers 1 lorsque $x \longrightarrow \pm \infty$.

2° La fraction rationnelle : $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + ... + a_n}{b_0\, x^p + b_1\, x^{p-1} + ... + b_p}$ se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ lorsque x devient infini. Pour $x \neq 0$, on peut écrire :

$$F(x) = \frac{a_0\, x^n}{b_0\, x^p} . \frac{1 + \frac{a_1}{a_0\, x} + \frac{a_2}{a_0\, x^2} + ... + \frac{a_n}{a_0\, x^n}}{1 + \frac{b_1}{b_0\, x} + \frac{b_2}{b_0\, x^2} + ... + \frac{b_p}{b_0\, x^p}}.$$

La seconde fraction du second membre tend vers $+ 1$ lorsque x devient infini. Donc :

La limite d'une fraction rationnelle, lorsque x devient infini, est celle du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

On voit que *la limite est infinie* avec le signe de $\frac{a_0}{b_0}\, x^{n-p}$ pour $n > p$, *égale à* $\frac{a_0}{b_0}$ pour $n = p$, *nulle* pour $n < p$.

3° Si x_0 annule $A(x)$ et $B(x)$, la fraction rationnelle $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ se présente pour $x = x_0$ sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On peut alors l'écrire (n° 44) :

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{(x - x_0)\, C(x)}{(x - x_0)\, D(x)}$$

et elle est, pour $x \neq x_0$, équivalente à $\frac{C(x)}{D(x)}$ qui tend vers $\frac{C(x_0)}{D(x_0)}$ lorsque $x \longrightarrow x_0$:

Si pour $x = x_0$ une fraction rationnelle $F(x)$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, elle admet, lorsque x tend vers x_0, la même limite que la fraction $F_1(x)$ obtenue après simplification par $x - x_0$.

EXEMPLE. — *Trouver pour $x = 2$ la limite de* $F(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

Pour $x = 2$, la fonction $F(x)$ prend la forme $\frac{0}{0}$. Pour $x \neq 2$, on peut écrire :

$$F(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+3}{x-1} \Longrightarrow \lim_{x \to 2} F(x) = \lim_{x=2} \frac{x+3}{x-1} = \frac{2+3}{2-1} = 5.$$

Pour $x = 2$, la fonction $F(x)$ admet 5 pour vraie valeur.

COORDONNÉES ET GRAPHES

84. Coordonnées cartésiennes. — Rappelons qu'un repère cartésien xOy se compose (fig. 18) de deux axes Ox et Oy de même origine O et de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose suivant Ox et Oy et :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Les nombres relatifs x et y, composantes scalaires de $\overrightarrow{OM}$, sont respectivement l'*abscisse* x et l'*ordonnée* y du point M. La position du point M dans le plan xOy est déterminée par l'ensemble de ses deux *coordonnées* x et y : On dit le point M (x, y).

Le repère cartésien xOy est dit *normé* si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont le même module, *rectangulaire* si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires. Il est *orthonormé* si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont même module et sont perpendiculaires.

Dans ce dernier cas : $\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 \Longrightarrow$ $\boxed{\overline{OM}^2 = x^2 + y^2}$

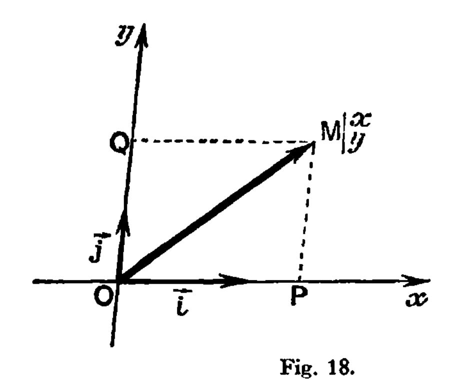


Fig. 18.

Fig. 19.

85. Composantes scalaires d'un vecteur. — Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui joint le point A (x_1, y_1) au point B (x_2, y_2) a pour composantes scalaires (fig. 19) :

$$X = x_2 - x_1 \quad \text{et} \quad Y = y_2 - y_1$$

et :

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

Si le repère est orthonormé : $\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Dans tout repère, le milieu I de AB a pour coordonnées (fig. 19) :

$$x_I = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{et} \quad y_I = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Étant donnés deux vecteurs $\vec{V}(X, Y)$ et $\vec{V}'(X', Y')$, rappelons que :

Dans tout repère cartésien : $\vec{V} \parallel \vec{V}' \iff \frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'}$.

Dans un repère orthonormé : $\vec{V} \perp \vec{V}' \iff XX' + YY' = 0$.

86. Graphe d'une fonction. — Soit $y = f(x)$ une fonction définie sur le segment $[a, d]$. Le plan étant rapporté à un repère cartésien xOy (fig. 20) construisons, pour toute valeur de x de $[a, d]$, le point M de coordonnées x et $y = f(x)$.

***L'ensemble des points* M $[x, y = f(x)]$ *est le graphe ou la représentation graphique de la fonction* $y = f(x)$ *sur* $[a, d]$.**

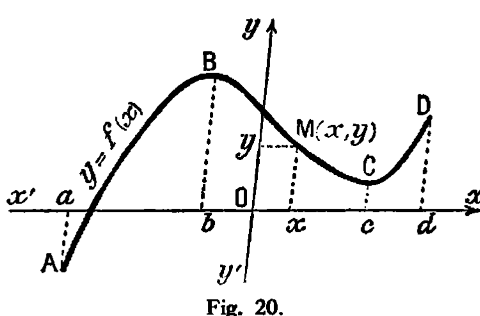


Fig. 20.

Les arcs AB et CD correspondent à des segments $[a, b]$ et $[c, d]$ sur lesquels la fonction est croissante tandis que l'arc BC correspond à un segment $[b, c]$ sur lequel la fonction est décroissante.

Le point B correspond au *maximum* $f(b)$ et le point C au *minimum* $f(c)$.

Le graphe de toute fonction impaire admet le point O pour centre de symétrie car les points M $[x, f(x)]$ et M' $[-x, -f(x)]$ sont symétriques par rapport à O (fig. 21).

En coordonnées rectangulaires, le graphe de toute fonction paire admet Oy pour axe de symétrie (fig. 22) car les points M $[x, f(x)]$ et M' $[-x, f(x)]$ sont symétriques par rapport à Oy.

Enfin dans tout repère, le graphe d'une fonction périodique, de période p, se compose d'une infinité d'arcs égaux (fig. 23), chacun d'eux se déduisant du précédent dans la translation de vecteur $\vec{V}(p, 0)$.

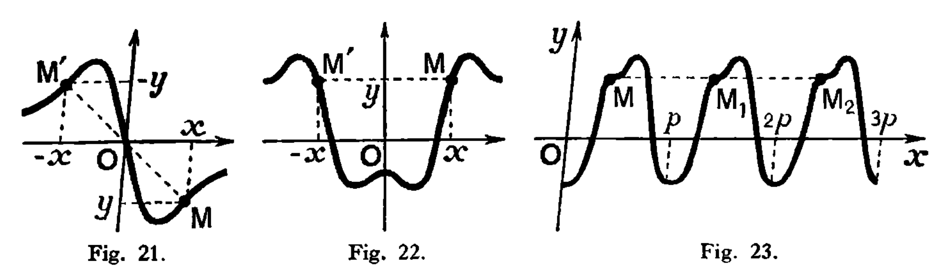


Fig. 21. Fig. 22. Fig. 23.

Plus généralement, l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient une relation $F(x, y) = 0$ est le plus souvent une courbe (C), appelée *courbe représentative ou graphe de la relation* $F(x, y) = 0$. Réciproquement la relation $F(x, y) = 0$ qui caractérise les points d'une courbe donnée (C) est l'*équation de la courbe* (C).

87. Définition. — ***Une fonction*** $y = f(x)$, ***définie sur un segment*** $[a, d]$, ***est dite continue sur*** $[a, d]$ ***si en tout point*** x_0 ***de ce segment l'accroissement*** $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ ***tend vers*** 0 ***en même temps que*** $\Delta x = x - x_0$.

Il en est ainsi (n° 82) lorsque $f(x)$ est une fonction algébrique de x. La fonction $y = f(x)$ est alors représentée graphiquement (fig. 20) par un arc de courbe continu joignant les points A $[a, f(a)]$ et D $[d, f(d)]$.

88. Théorème. — ***La fonction*** $y = ax + b$ ***est représentée graphiquement par une droite parallèle au vecteur*** $\overrightarrow{OS}\,(1, a)$.

Soient $M_0\,(x_0, y_0 = ax_0 + b)$ un point fixe et $M\,(x, y = ax + b)$ un point variable du graphe de la fonction $y = ax + b$ (fig. 24). La relation : $y - y_0 = a(x - x_0)$ entraîne (n° 85):

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{OS}.$$

a est le coefficient directeur de la droite et b son ordonnée à l'origine. On en déduit que :

Dans tout repère les droites $y = ax + b$ ***et*** $y = a'x + b'$ ***sont parallèles si*** $a = a'$. ***Dans un repère orthonormé, elles sont rectangulaires si*** $aa' = -1$.

En effet (n° 85) : $\overrightarrow{OS}\,(1, a) \parallel \overrightarrow{OS'}(1, a') \iff \frac{1}{1} = \frac{a}{a'}$ soit : $a = a'$.

Dans un repère orthonormé : $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{OS'} \iff 1 \times 1 + aa' = 0$ ou $aa' = -1$.

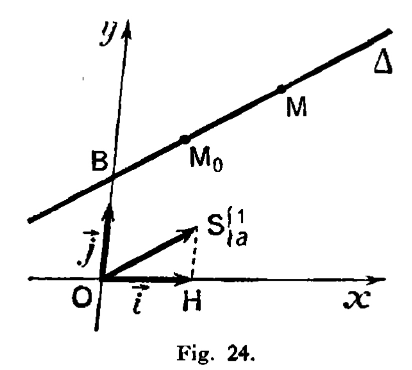


Fig. 24.

Fig. 25.

L'équation $ax + by + c = 0$ est représentée graphiquement par la droite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ pour $b \neq 0$, par la droite $x = -\frac{c}{a}$ pour $b = 0$.

89. Corollaire. — ***Le coefficient directeur de la droite*** M_0M_1 ***est égal au rapport des accroissements*** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ***quand on passe de*** M_0 ***à*** M_1.

Les relations $y_0 = ax_0 + b$ et $y_1 = ax_1 + b$ entraînent (fig. 25) :

$$y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0) \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

On obtient alors l'équation de la droite $M_0\,M_1$ en écrivant : $y - y_0 = a(x - x_0)$.

90. Intersection de deux graphes. — ***Les coordonnées des points communs à deux courbes tracées dans un même repère sont les solutions du système formé par les équations de ces deux courbes.***

En effet, toute solution de ce système correspond à un point commun, et réciproquement les coordonnées de tout point commun vérifient les deux équations et constituent une solution du système. On peut ainsi résoudre graphiquement le système en mesurant les coordonnées des points communs aux deux courbes, ou calculer ces coordonnées en résolvant algébriquement le système.

Ainsi (fig. 26) les droites (D) : $x - 2y + 4 = 0$ et (D') : $3x + 2y - 12 = 0$, se coupent au point M (2; 3) et $x = 2$, $y = 3$ constitue la solution du système formé par les équations de D et de D'.

Notons que l'équation E(x) qui résulte de l'élimination de y entre les équations des deux courbes est l'*équation aux abscisses des points d'intersection.*

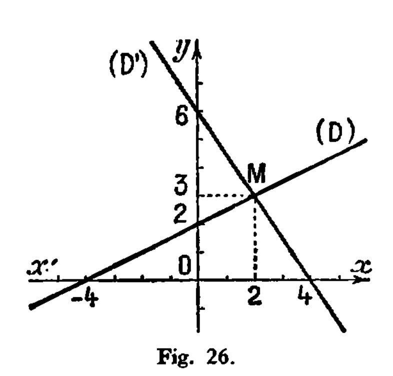


Fig. 26.

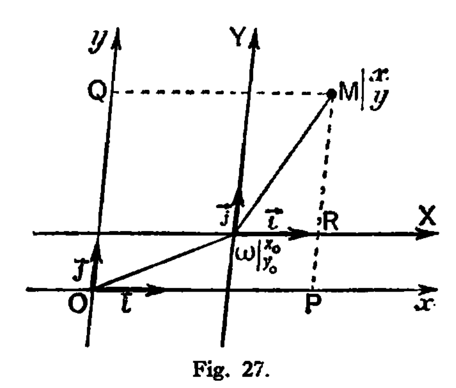


Fig. 27.

91. Translation d'un repère cartésien. — Supposons le plan rapporté au repère cartésien xOy de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (fig. 27). Soit ω (x_0, y_0) un point donné et $X\omega Y$ le repère cartésien qui se déduit de xOy dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$. Soit M(x, y) un point quelconque du plan et soient X et Y ses coordonnées dans le repère $X\omega Y$.

La relation $\overrightarrow{\omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ montre que X et Y sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\omega M}$ dans le repère xOy. Donc (n° 85) :

$X = x - x_0$ et $Y = y - y_0$ ou : $\boxed{x = x_0 + X}$ $\boxed{y = y_0 + Y}$.

L'ancienne abscisse est égale à l'abscisse de la nouvelle origine augmentée de la nouvelle abscisse.

Pour les ordonnées on obtient la règle analogue.

Si $y = f(x)$ est l'ancienne équation d'une courbe (C) on obtient :

$$y_0 + Y = f(x_0 + X) \iff Y = F(X).$$

C'est l'équation de la courbe (C) dans le nouveau repère. Si ce dernier a été choisi de façon que cette nouvelle équation soit particulièrement simple, on dit que Y = F (X) *est l'équation réduite de la courbe* (C).

EXERCICES

— Étudier les variations des fonctions suivantes :

374. $y = 2x - 3$; $y = -3x + 2$; $y = -x - 5$.

375. $y = x^2 - 4$; $y = \frac{2}{x}$; $y = \frac{2 - x}{x}$.

376. Montrer que la fonction : $y = x - \frac{a^2}{x}$ est croissante dans les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

— Déterminer la limite des expressions suivantes :

377. $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ (lorsque $x \to 1$).

378. $\frac{x^3 + 27}{3x + 9}$ $(x \to -3)$.

379. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$ $(x \to 2)$.

380. $\frac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 + x - 3}$ $(x \to 1)$.

381. $\frac{2x^3 - 5x + 6}{3x^2 + 7x + 2}$ $(x \to -2)$.

382. $\frac{3x^2 - 2ax - a^2}{2x^2 - 3ax + a^2}$ $(x \to a)$.

383. $\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ $(x \to 1)$.

384. $\frac{2x + 1}{2x^2 - x - 6} - \frac{x + 3}{3x^2 - 5x - 2}$ $(x \to 2)$.

385. $\frac{x - 3}{x - 1 - \sqrt{x + 1}}$ $(x \to 3)$.

386. $\frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 7} - \sqrt{2x + 1}}$ $(x \to 4)$.

387. 1° Démontrer que la fonction $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - x$ est une fonction impaire. Trouver ses limites $f(+0)$ et $f(-0)$ lorsque $x \to 0$ par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures.

2° Étudier les variations et construire le graphe de cette fonction.

388. 1° Démontrer que $y = \frac{1}{2}(|x + 1| + |x - 1|)$ s'écrit :

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}\right)$$

et est une fonction paire. En donner une expression simple dans chacun des intervalles limités par -1 et $+1$.

2° Établir le tableau des variations de y et construire son graphe dans un repère orthonormé. Symétrie de ce graphe.

389. 1° On désigne par $E(x)$ le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à x (*caractéristique de* x). Construire le graphe de $y = E(x)$.

2° Montrer que la fonction $z = x - E(x)$ (*mantisse* de x) est une fonction périodique. Construire son graphe.

390. Soit $r(x)$ le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à $\frac{1}{2}(x + 1)$. On considère la fonction $y = (-1)^{r(x)}[x - 2r(x)]$.

1° Montrer que y est une fonction périodique de période 4. Si n désigne un entier algébrique quelconque, donner une expression simple de y sur chacun des segments $[4n - 1, 4n + 1]$ et $[4n + 1, 4n + 3]$.

2° Établir le tableau de variation et construire en orthonormées le graphe de la fonction y. Quels sont les éléments de symétrie de ce graphe ? Comparer $f(-x)$, $f(2 - x)$, $f(2 + x)$ à $f(x) = y$.

— Réduire les fonctions suivantes et étudier leur variation :

391. $y = \sqrt{x^2 + 4 + 4\sqrt{x^2}} - \sqrt{x^2 + 4 - 4\sqrt{x^2}}$

392. $y = \sqrt{x^2 + 9 + 6|x|} - \sqrt{x^2 + 9 - 6|x|}$

393. $y = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+2)^2}$

394. $y = \frac{1}{2}\sqrt{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2} - 1.$

395. On considère en orthonormées les points M (x, y), A $(-\frac{a}{2}; 0)$, B $(\frac{a}{2}; 0)$ et on mène MH perpendiculaire en H à AB.

1° Calculer $\overline{MA}^2$ et $\overline{MB}^2$ et démontrer les relations :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\,\overline{MO}^2 + \frac{1}{2}\overline{AB}^2 \quad \text{et} \quad \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\,\overline{AB}.\overline{OH}.$$

2° k étant un nombre donné, trouver l'équation et la nature des lieux des points M tels que :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k \quad \text{et} \quad \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = k.$$

396. 1° Soit, dans un repère orthonormé, le point A $(a, -1)$. Trouver l'équation du lieu du point M (x, y) tel que l'angle AOM soit droit en utilisant la relation : $\overline{AM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OM}^2$. Réciproque.

2° On considère les points A $(a, b-1)$ et B $(-a, b+1)$. Trouver l'équation de la médiatrice de AB en utilisant la relation : $MA^2 = \overline{MB}^2$. Réciproque.

397. On considère les points A (x_1, y_1) et B (x_2, y_2). Trouver les coordonnées du point M (x, y) de la droite AB tel que : $\overline{MA} + k\,\overline{MB} = 0$ (k, nombre donné).

En déduire l'équation de la droite AB sous la forme : $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ et en donner l'interprétation géométrique.

— Construire par points les courbes suivantes :

398. $y = x^2 - 3x$ pour $-2 \leqslant x \leqslant 5.$

399. $y = 2x - x^2$ pour $-3 \leqslant x \leqslant 5.$

400. $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 2}$ pour $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 10.$

401. $y = \frac{5}{x^2 + 1}$ pour $-5 \leqslant x \leqslant 5.$

— Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants et vérifier par le calcul :

402. $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 5x + 3y = 26. \end{cases}$ **403.** $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 7x - 3y = 24. \end{cases}$

404. $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 4x - 5y = 18. \end{cases}$ **405.** $\begin{cases} 3x - 5y = -27 \\ 7x + 2y = -22. \end{cases}$

— Dans un repère orthonormé, former l'équation de la droite D telle que :

406. La droite D est définie par A $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$ et B $(+3; +4)$.

407. La droite D est issue de A $(+1; -1)$ et est parallèle à la droite $2x + 3y - 5 = 0$.

408. La droite D passe par A $(+2; +3)$ et est perpendiculaire à la droite $x + 2y - 4 = 0$.

409. La droite D est médiatrice du segment joignant A $(+5, -2)$ et B $(-1, +1)$.

410. La droite D est la hauteur issue de A dans le triangle de sommets A $(+3, +6)$, B $(-2, +3)$ et C $(+8, -2)$.

411. On construit dans un repère orthonormé le point M ayant pour coordonnées :

$$x = \frac{4(1-t^2)}{1+t^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{8t}{1+t^2}.$$

1° Calculer OM et en déduire le lieu de M lorsque t varie.

2° Soit A le point ($x = 4$, $y = 0$) et I le milieu de AM. Calculer le coefficient directeur de OI et donner l'interprétation trigonométrique.

412. Dans un repère orthonormé xOy, on donne les points fixes F(+ 4, 0), F'(— 4, 0), les droites fixes D et D' d'équations : $x = \frac{25}{4}$ et $x = -\frac{25}{4}$ et le point mobile M de coordonnées : $x = 5\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $y = \frac{6t}{1+t^2}$, se projetant en H et H' sur D et D'.

1° Calculer les longueurs MF et MF', puis la somme MF + MF'.

2° Calculer les distances MH et M'H' de M à D et D', puis les rapports $\frac{MF}{MH}$ et $\frac{MF'}{MH'}$.

3° En calculant la somme $9x^2 + 25y^2$, trouver l'équation de la courbe (C), lieu de M lorsque t varie sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

413. On considère la famille de droites D dépendant du paramètre m :

$$x - y - 1 + m(x + y - 3) = 0.$$

1° Montrer que D passe par un point fixe A que l'on déterminera.

2° Déterminer m pour que la droite D passe par B (+ 3, + 4).

3° Trouver la relation entre m' et m'' pour que (repère orthonormé) les droites D correspondant à $m = m'$ et $m = m''$ soient rectangulaires.

414. 1° Montrer que toute droite D passant par le point A commun aux droites :

$$D_1 : 2x - y - 5 = 0 \quad \text{et} \quad D_2 : x - y + 7 = 0$$

a pour équation : $(2x - y - 5) + m(x - y + 7) = 0$.

2° Déterminer la droite D issue de A et passant par B (+ 1 ; + 1) et la droite D issue de A perpendiculaire à la droite $2y - 5x + 11 = 0$ (repère orthonormé).

3° Trouver la relation entre m' et m'' pour que les droites D correspondantes soient rectangulaires.

415. On considère les expressions $D = 2x - 3y + 6$ et $D' = x + 2y - 11$.

1° Montrer que les quatre droites : $D = 0$, $D' = 0$, $D + mD' = 0$, $D - mD' = 0$ sont concourantes et déterminer leur point commun S.

2° Déterminer m pour que les deux droites $D + mD' = 0$ et $D - mD' = 0$ soient rectangulaires.

3° Ces quatre droites coupent respectivement Ox en A, B, M et P. Déterminer m pour que M soit le milieu de AB. Quelle est alors la direction de la droite $D - mD' = 0$.

416. Déterminer m pour que les trois droites suivantes soient concourantes et déterminer leur point commun :

$$(m-1)x + y = 1; \qquad x + (m-2)y = 2; \qquad 2x - y = 3.$$

417. Même question pour les droites :

$$4x - 3y = 5; \qquad 3x + 4y = -1; \qquad mx - (m+1)y = 2m + 1.$$

418. 1° Déterminer dans un repère orthonormé l'équation de la droite passant par les points A (+ 6, + 2) et B (+ 2, — 2), puis l'équation de la médiatrice de AB.

2° Soit le point C (— 2, + 6). Montrer que le triangle CAB est isocèle.

3° Établir l'équation de la droite Cz parallèle à AB. Montrer que les intersections M, N, P, Q, de Cz, AB, AC et BC avec $x'x$ vérifient la relation $\overline{MP} \cdot \overline{NQ} + \overline{MQ} \cdot \overline{NP} = 0$.

419. On considère en orthonormées les trois points : A $(-6, 0)$, B $(6, 0)$ et C $(3, 9)$.

1° Établir les équations des côtés du triangle ABC, puis celles de ses médiatrices. Calculer les coordonnées du centre ω du cercle ABC et le rayon de ce cercle.

2° Déterminer les équations des hauteurs du triangle ABC, celles de ses médianes, puis les coordonnées de l'orthocentre H et du centre de gravité G.

3° Montrer que $\overline{OC} = 3\,\overline{OG}$, que HG passe par ω et que $\overline{\omega H} = 3\,\overline{\omega G}$.

420. Soient en orthonormées deux points A (x_1, y_1) et B (x_2, y_2) tels que l'angle saillant orienté AOB soit de même sens que l'angle xOy.

1° Montrer que l'aire du triangle OAB est égale, quel que soit le cas de figure, à $\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

2° En déduire la distance OH de O à la droite AB.

Application numérique : $x_1 = 10$; $y_1 = 5$; $x_2 = 6$ et $y_2 = 8$.

421. Soient Oxy, un repère orthonormé, A un point de coordonnées $x = a, y = b$ $(a > 0, b > 0,)$, P un point de coordonnées $x = p$, $y = 0$. On appelle Q le point de l'axe Oy situé sur la droite AQ, perpendiculaire en A à AP.

1° Écrire les équations des droites OA, AP, AQ.

2° Montrer que le quadrilatère OPAQ est inscriptible; lieu du centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère quand le point P varie, A restant fixe.

3° Calculer, en fonction de a, b et de p, les coordonnées du point Q; en déduire l'équation de la droite PQ et l'expression de $\overline{PQ}^2$ en fonction des mêmes paramètres.

4° On pose maintenant $a = 2$, $b = 1$; déterminer p de manière que l'on ait $PQ = \sqrt{5}$. Préciser, sur une figure, les positions correspondantes de P et de Q. Montrer à l'aide de considérations géométriques que, pour la valeur de p ainsi trouvée, la longueur PQ atteint son minimum.

DÉRIVÉES

92. Dérivée en un point. — Considérons une fonction $y = f(x)$ définie et continue sur le segment $[a, b]$ et soit x_0 une valeur donnée de ce segment. Lorsque, sur ce segment, x varie de x_0 à $x_1 = x_0 + h$, le rapport des accroissements correspondants Δy et Δx s'écrit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}.$$

Faisons tendre x_1 vers x_0 (ou h vers 0). La fonction $f(x)$ étant continue pour $x = x_0$, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ (n° 83,3°).

Si ce rapport admet une *limite finie m*, on dit que la *fonction f(x) est dérivable au point* x_0 et que sa dérivée en x_0 est m :

On appelle dérivée de la fonction $y = f(x)$ au point x_0, la limite, lorsqu'elle existe, du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ lorsque $x_1 \longrightarrow x_0$.

On symbolise cette dérivée par y_0' ou $f'(x_0)$. Donc :

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (1) \quad \text{ou} \quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2)$$

Cette limite s'obtient aisément lorsque le rapport (1) se simplifie par $x_1 - x_0$ ou le rapport (2) par h. Il suffit alors de remplacer x_1 par x_0 ou h par 0 dans l'expression obtenue.

93. Exemples. 1° *Dérivée de $y = x^3$ pour $x_0 = 1$.*

On obtient : $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^3 - x_0^3}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^3 - 1}{x_1 - 1} = x_1^2 + x_1 + 1.$$

Lorsque $x_1 \longrightarrow 1$, on obtient : $f'(1) = \lim (x_1^2 + x_1 + 1) = 3$.

2° *Dérivée de $y = \frac{3}{x}$ pour $x_0 = 2$.*

Posons $x_1 = x_0 + h = 2 + h$. On obtient : $y_0 = \frac{3}{2}$ et $y_1 = \frac{3}{2 + h}$.

D'où $\Delta x = x_1 - x_0 = h$; $\Delta y = \frac{3}{2 + h} - \frac{3}{2} = \frac{-3h}{2(2 + h)}$. $\Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{2(2 + h)}$.

Lorsque $h \longrightarrow 0$, on obtient $y_0' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{4}$.

94. Signification géométrique. — Soit (C) le graphe de la fonction $y = f(x)$. Désignons (fig. 28) par M_0 le point fixe de coordonnées x_0 et $y_0 = f(x_0)$ et par M_1 le point de coordonnées x_1 et $y_1 = f(x_1)$. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ est le coefficient directeur de la sécante M_0M_1 (n° 89).

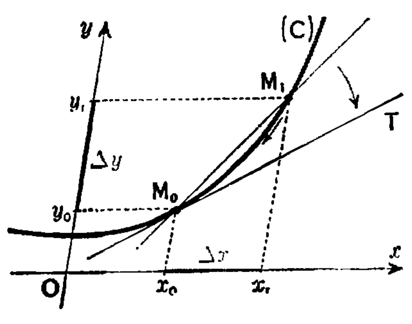


Fig. 28.

Lorsque x_1 tend vers x_0, le point variable M_1, se déplaçant sur la courbe (C), vient se confondre avec le point fixe M_0. Si la droite M_0M_1 tend vers une position limite M_0T, cette droite M_0T est, par définition, la tangente en M à la courbe (C). Son coefficient directeur est la limite, lorsque x_1 tend vers x_0, du coefficient directeur $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ de la sécante M_0M_1. C'est donc la dérivée de la fonction $f(x)$ au point x_0.

La dérivée de la fonction $y = f(x)$ au point x_0 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point M_0 d'abscisse x_0.

Il en résulte que l'existence de la dérivée au point x_0 entraîne celle de la tangente au point M_0 et détermine sa position.

95. Remarques. — 1° Pour calculer une dérivée en un point, on peut utiliser d'autres notations. En posant $x_0 = a$ et $x_1 = x$, on voit que :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

2° *Si une fonction $f(x)$ s'annule pour $x = 0$, sa dérivée au point $x = 0$ est la limite pour $x = 0$ du rapport $\frac{f(x)}{x}$.*

Pour $f(0) = 0$ on obtient : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \implies f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

96. Théorème. — ***Toute fonction $f(x)$ dérivable au point x_0 est continue en ce point.***

Si $f(x_1) - f(x_0)$ ne tend pas vers 0 lorsque x_1 tend vers x_0, le rapport $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ ne peut admettre de limite finie et la fonction n'est pas dérivable au point x_0. Donc : $x \longrightarrow x_0 \implies f(x) \longrightarrow f(x_0)$ et la fonction $f(x)$ est continue (n° 87).

97. Fonction dérivée. — Lorsque la fonction $y = f(x)$ est dérivable en tout point x_0 de l'intervalle $]a, b[$, elle est dite dérivable dans cet intervalle. Sa dérivée $f'(x_0)$, qui dépend en général de la valeur x_0 attribuée à x, est une nouvelle fonction de x appelée *fonction dérivée de $f(x)$*, ou simplement *dérivée de $f(x)$*, que l'on symbolise par y' ou $f'(x)$.

D'après la définition du n° 92, on peut donc écrire :

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \quad \text{ou} \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

ou simplement :

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Le calcul s'effectue comme ci-dessus en supposant x constant.

Ainsi pour calculer la dérivée de $y = x^3$ on écrit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x} = x_1^2 + x_1 x + x^2.$$

Lorsque $\Delta x \longrightarrow 0$, $x_1 \longrightarrow x$ et on obtient : $y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$.

La dérivée de x^3 est donc $3x^2$ et on vérifie que pour $x = 1$, cette dérivée est égale à $+ 3$, valeur calculée directement au n° 93.

98. Dérivées successives. — Si la fonction $y' = f'(x)$ admet à son tour une fonction dérivée, celle-ci est appelée *dérivée seconde* de la fonction $y = f(x)$ et est représentée par le symbole : $y'' = f''(x)$. On peut ainsi définir de proche en proche une *dérivée troisième* : $y''' = f'''(x)$... puis une dérivée $n^{\text{ième}}$ (ou d'ordre n) : $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

CALCUL DES DÉRIVÉES

99. Dérivée d'une constante : $y = \text{A}$.

Quel que soit x, on a : $y = \text{A}$, donc :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\text{A} - \text{A}}{x_1 - x} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Soit $y' = 0$.

Une fonction constante admet en tout point une dérivée nulle.

$$\boxed{y = \text{A}} \implies \boxed{y' = 0}$$

100. Dérivée de $y = x$.

On obtient : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x} = 1$ et $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

La fonction $y = x$ admet en tout point une dérivée égale à 1.

$$\boxed{y = x} \implies \boxed{y' = 1} \implies \boxed{y'' = 0}$$

101. Dérivée du monôme : $y = x^n$.

On obtient : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \ldots + x_1 x^{n-2} + x^{n-1}$.

Lorsque Δx tend vers 0, x_1 tend vers x et chacun des n termes du dernier membre a pour limite x^{n-1}.

Donc :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Le monôme $y = x^n$ admet en tout point une dérivée égale nx^{n-1}.

$$\boxed{y = x^n} \implies \boxed{y' = nx^{n-1}} \implies \boxed{y'' = n(n-1)\,x^{n-2}}$$

On voit ainsi que les fonctions x, x^2, x^3, x^4... admettent respectivement pour dérivées : 1, $2\,x$, $3\,x^2$, $4\,x^3$...

102. Dérivée d'une somme. — Soient $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ des fonctions de x admettant pour dérivées respectives $u'(x)$, $v'(x)$, $w'(x)$. Lorsque x prend la valeur x_1, la somme $y = u + v + w$ prend la valeur $y_1 = u_1 + v_1 + w_1$ et l'on obtient en retranchant terme à terme :

$$\Delta y = y_1 - y = (u_1 - u) + (v_1 - v) + (w_1 - w) = \Delta u + \Delta v + \Delta w.$$

Soit : $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Lorsque Δx tend vers 0, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \longrightarrow u'$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \longrightarrow v'$ et $\dfrac{\Delta w}{\Delta x} \longrightarrow w'$.

Et (n° 82) : $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u' + v' + w'.$$

La somme de plusieurs fonctions dérivables admet pour dérivée la somme des dérivées de chacune de ces fonctions.

$$\boxed{y = u + v + w} \implies \boxed{y' = u' + v' + w'}$$
$$\implies y'' = u'' + v'' + w''$$

Autrement dit, une somme se dérive terme à terme.

103. Dérivée d'un produit. — 1° Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions de x admettant respectivement pour dérivées $u'(x)$ et $v'(x)$. Lorsque x prend la valeur x_1, le produit $y = uv$ prend la valeur $y_1 = u_1v_1$ et on peut écrire :

$$\Delta y = y_1 - y = u_1v_1 - uv = (u_1v_1 - uv_1) + (uv_1 - uv) = (u_1 - u)\,v_1 + u(v_1 - v).$$

Soit : $\Delta y = \Delta u . v_1 + u . \Delta v$ et $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v_1 + u . \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

Lorsque $\Delta x \to 0$, $v_1 \to v$, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$ et on obtient (n° 82) :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'v + uv'.$$

Le produit $y = uv$ de deux fonctions dérivables admet pour dérivée $y' = u'v + uv'$.

$$\boxed{y = uv} \implies \boxed{y' = u'v + uv'} \implies y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

2° Généralisation. — Si $y = uvw = (uv)\,w$ on obtient :

$$y' = (uv)'\,w + (uv)\,w' = (u'v + uv')\,w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$\boxed{y = uvw} \implies \boxed{y' = \Sigma\, u'vw}$$

Cette démonstration s'étend par récurrence à un nombre quelconque de facteurs :

Le produit de plusieurs fonctions dérivables admet pour dérivée la somme des expressions obtenues en remplaçant successivement, dans ce produit, chaque fonction par sa dérivée.

$$\boxed{y = uv \dots w} \implies \boxed{y' = \Sigma\, u'v \dots w}$$

104. Corollaire. — ***Si on multiplie une fonction dérivable par une constante sa dérivée est multipliée par cette constante.***

Si $u = \mathrm{A}$, on obtient (nº 99), $u' = 0$ et la dérivée de $y = \mathrm{A}v$ se réduit à $y' = \mathrm{A}v'$. Donc :

$$\boxed{y = \mathrm{A}f(x)} \implies \boxed{y' = \mathrm{A}f'(x)}$$

Ainsi d'après le nº 101, on obtient la dérivée du monôme $\mathrm{A}x^n$:

$$\boxed{y = \mathrm{A}x^n} \implies \boxed{y' = n\mathrm{A}x^{n-1}}$$

105. Dérivée d'un polynôme. — ***Un polynôme de degré m admet pour dérivée un polynôme de degré m — 1.***

La dérivée du polynôme :

$$f(x) = \mathrm{A}_m x^m + \mathrm{A}_{m-1}x^{m-1} + \dots + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_0$$

est la somme des dérivées de chacun de ses termes :

$$f'(x) = m\mathrm{A}_m x^{m-1} + (m-1)\,\mathrm{A}_{m-1}x^{m-2} + \dots + 2\,\mathrm{A}_2 x + \mathrm{A}_1.$$

Ainsi :

$y = ax + b$	admet pour dérivée :	$y' = a$
$y = ax^2 + bx + c$	—	$y' = 2\,ax + b$
$y = x^3 + px + q$	—	$y' = 3\,x^2 + p$
$y = ax^4 + bx^2 + c$	—	$y' = 4\,ax^3 + 2\,bx.$

106. Dérivée d'un quotient. — Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions de x dérivables sur un intervalle où $v(x) \neq 0$. Lorsque x prend la valeur x_1, la fonction $y = \frac{u}{v}$ prend la valeur $y_1 = \frac{u_1}{v_1}$ et on peut écrire :

$$\Delta y = y_1 - y = \frac{u_1}{v_1} - \frac{u}{v} = \frac{u_1 v - u v_1}{v v_1} = \frac{1}{v v_1}\,[(u_1 - u)\,v - u\,(v_1 - v)].$$

Soit : $\Delta y = \dfrac{1}{vv_1}(\Delta u . v - u . \Delta v)$ et $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{vv_1}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v - u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right).$

Lorsque $\Delta x \to 0$, $v_1 \to v$, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$ et on obtient (nº 82) :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v^2}\,(u'v - uv') = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Le quotient $y = \frac{u}{v}$ de deux fonctions dérivables admet pour dérivée $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\boxed{y = \frac{u}{v}} \implies \boxed{y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

EXEMPLE. — La dérivée de $y = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 3}$ s'écrit :

$$y' = \frac{(3x^2 - 4)(x^2 + 3) - (x^3 - 4x)(2x)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y' = \frac{3x^4 + 9x^2 - 4x^2 - 12 - 2x^4 + 8x^2}{(x^2 + 3)^2}.$$

Soit après réduction : $$y' = \frac{x^4 + 13x^2 - 12}{(x^2 + 3)^2}.$$

107. Corollaires. — 1° ***La dérivée de*** $y = \dfrac{1}{v}$ ***est*** $y' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Si $u = 1$, la dérivée de $y = \dfrac{u}{v}$ se réduit à $y' = -\dfrac{v'}{v^2}$, car $u' = 0$.

Donc : $$\boxed{y = \frac{1}{u}} \implies \boxed{y' = -\frac{u'}{u^2}}$$

En particulier : $$\boxed{y = \frac{1}{x}} \implies \boxed{y' = -\frac{1}{x^2}}$$

2° On peut utiliser la formule précédente pour calculer la dérivée de $y = \dfrac{uv}{w}$ sous la forme du produit $y = u.v.\dfrac{1}{w}$. On obtient :

$$y' = \frac{u'v}{w} + \frac{uv'}{w} - \frac{uvw'}{w^2}.$$

108. Dérivée d'une puissance entière. — Soit $u(x)$ une fonction de x admettant pour dérivée $u'(x)$. La fonction $y = u^m$ peut être considérée comme produit de m facteurs : $y = u.u \,.....\, u$.

Elle admet (n° 103) pour dérivée la somme de m termes égaux à $u^{m-1}u'$.

La fonction $y = u^m$ ***admet pour dérivée*** $y' = mu^{m-1}u'$.

$$\boxed{y = u^m} \implies \boxed{y' = mu^{m-1}u'}$$

On vérifie que la dérivée de $y = x^m$ est $y' = mx^{m-1}$.

REMARQUE. — La règle précédente s'applique également lorsque m est un entier négatif. Posons $m = -p$ et $y = u^m = \dfrac{1}{u^p} = \dfrac{1}{v}$. On obtient :

$$y' = -\frac{v'}{v^2} = -\frac{pu^{p-1}u'}{u^{2p}} = -pu^{-p-1}u' \text{ soit : } y' = mu^{m-1}u'.$$

Ainsi $y = \dfrac{1}{(x-1)^3} = (x-1)^{-3}$ admet pour dérivée

$$y' = -3(x-1)^{-4} = \frac{-3}{(x-1)^4}.$$

109. Dérivée d'une racine carrée. — Soit $u(x)$ une fonction positive de x admettant pour dérivée u' et soit $y = \sqrt{u(x)}$.

On obtient : $\Delta y = y_1 - y = \sqrt{u_1} - \sqrt{u} = \dfrac{u_1 - u}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u}} = \dfrac{\Delta u}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u}}$.

D'où : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u}} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$.

Lorsque x_1 tend vers x, u_1 tend vers u, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ vers u' et $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ admet donc pour limite : $\dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

La fonction $y = \sqrt{u}$ admet pour dérivée $y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$\boxed{y = \sqrt{u}} \Longrightarrow \boxed{y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

En particulier : $\quad y = \sqrt{x} \Longrightarrow =' y \, \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

110. Exemple de calcul de dérivée. — *Soit à calculer la dérivée de la fonction* $y = \dfrac{(3x-1)^2}{x^2+1}$.

Cette fonction est de la forme $y = \dfrac{u}{v}$ avec $u = (3x-1)^2$ et $v = x^2 + 1$. Or $u = w^2$ donc $u' = 2ww' = 2(3x-1) \times 3 = 6(3x-1)$ et $v' = 2x$.

On obtient : $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{6(3x-1)(x^2+1) - (3x-1)^2 \times 2x}{(x^2+1)^2}$.

Soit après réduction : $y' = \dfrac{2(3x-1)(x+3)}{(x^2+1)^2}$.

Il y a intérêt, tout au moins au début, à utiliser des fonctions intermédiaires de façon à se ramener à des types connus.

111. Résumé. — Les résultats, rassemblés dans le tableau suivant, sont à retenir, pour les calculs de dérivées :

FONCTION	DÉRIVÉE	FONCTION	DÉRIVÉE
$y = A$	$y' = 0$	$y = u + v + w$	$y' = u' + v' + w'$
$y = x$	$y' = 1$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$	$y = u^m$	$y' = mu^{m-1}u'$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = f(x) + A$	$y' = f'(x)$	$y = \dfrac{1}{u}$	$y' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$y = A\,f(x)$	$y = A f'(x)$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

EXERCICES

— Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

422. $y = 4x^3 - 5x + 1.$

423. $y = -2x^2 + 6x - 5.$

424. $y = 2x^3 - 3x + 5.$

425. $y = 3x^4 - 12x^2 + 7.$

426. $y = (3x + 1)^2 - (2x + 3)^2.$

427. $y = (2x + 1)^3 - x^2(x + 1).$

428. $y = x^3(x + 1)^2.$

429. $y = (x + 1)^5(x - 1)^3.$

430. $y = (2x + 1)^3(3x - 2)^2.$

431. $y = (3x - 5)^4(7x + 2)^3.$

432. $y = (x^2 + 1)(x^3 - 2x + 1).$

433. $y = (x^3 - 1)(x^4 - 2x^2 + 3).$

434. $y = x^4(x - 1)^5(x + 1)^3.$

435. $y = x^6(x^2 - 1)^3(x^2 + 1)^3.$

— Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

436. $y = \frac{4}{x}$

437. $y = -\frac{5}{3x}$

438. $y = \frac{3}{x - 1}$

439. $y = \frac{1}{2x - 3}$

440. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

441. $y = \frac{1}{2x^2 - 5x}$

442. $y = x + \frac{1}{x}$

443. $y = 2x + 3 - \frac{4}{x}$

444. $y = 2x + 1 - \frac{1}{x + 3}$

445. $y = x - 2 + \frac{1}{2x - 1}$

446. $y = \frac{1 - x}{1 + x}.$

447. $y = \frac{2x + 1}{x - 1}.$

448. $y = \frac{4x - 3}{2x + 1}.$

449. $y = \frac{3x + 2}{5x - 1}.$

450. $y = \frac{5x + 4}{x + 1}.$

451. $y = \frac{3x + 5}{2x - 1}.$

452. $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}.$

453. $y = \frac{(x - 1)^2}{2x - 4}.$

454. $y = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 3}.$

455. $y = \frac{2x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$

456. $y = \frac{4x^2 + 4x - 9}{4(x^2 - 1)}.$

457. $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 3x - 4}.$

458. $y = \frac{x^3}{(2x - 1)^2}.$

459. $y = \frac{(x + 1)^2}{(x - 1)^4}.$

460. $y = \sqrt{2x + 1}.$

461. $y = \sqrt{x^2 - 4x}.$

462. $y = x - \sqrt{x^2 - 1}.$

463. $y = x - 1 + \sqrt{2x + 1}.$

464. Démontrer que la dérivée de la fonction $y = \frac{u^m}{v^p}$ s'écrit :

$$y' = \frac{m v u^{m-1} u' - p u^m v'}{v^{p+1}} = \frac{u^{m-1}}{v^{p+1}} (m v u' - p u v').$$

Application à la dérivée de $y = \frac{(x-1)^5}{(x+2)^3}$.

465. On considère le polynôme : $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.
Calculer pour $x = 0$, la valeur de $f(x)$ et de ses dérivées successives et montrer que le polynôme s'écrit :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0).$$

466. 1° Calculer les dérivées successives de la fonction : $y = \frac{1}{a-x}$.

2° Montrer que la fonction $y = \frac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ peut s'écrire sous la forme décomposée : $y = \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{1-x} + \frac{\mathrm{C}}{2-x}$ et en déduire ses trois premières dérivées.

467. 1° Montrer que la fonction $y = \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 2x + 1}$ peut s'écrire sous la forme décomposée : $y = \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{1-x} + \frac{\mathrm{C}}{(1-x)^2}$.

2° En déduire ses trois premières dérivées.

468. 1° Montrer que si la fonction $f(x)$, dérivable pour $x = a$, s'annule pour $x = a$, sa dérivée $f'(a)$ est la limite du rapport $\frac{f(x)}{x-a}$ lorsque x tend vers a.

2° En déduire que si le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ pour $x = a$, il s'écrit $\frac{f(x)}{x-a} \times \frac{x-a}{g(x)}$. Lorsque x tend vers a il admet pour limite $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ (à condition toutefois que ce dernier rapport ne soit pas indéterminé).

3° Rechercher ainsi la limite de $\frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 - x - 1}$ lorsque x tend vers 1.

— Calculer la limite des fractions suivantes en remplaçant chaque fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ par le rapport des dérivées $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, d'après la propriété établie à l'exercice précédent (2°) :

469. $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ (lorsque $x \to 1$)

470. $\frac{x^3 + 27}{3x + 9}$ $(x \to -3)$.

471. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$ $(x \to 2)$

472. $\frac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 + x - 3}$ $(x \to 1)$.

473. $\frac{2x^3 - 5x + 6}{3x^2 + 7x + 2}$ $(x \to -2)$

474. $\frac{3x^2 - 2ax - a^2}{2x^2 - 3ax + a^2}$ $(x \to a)$.

475. $\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ $(x \to 1)$

476. $\frac{2x + 1}{2x^2 - x - 6} - \frac{x + 3}{3x^2 - 5x - 2}$ $(x \to 2)$.

VARIATION DES FONCTIONS

112. Sens de variation et signe de la dérivée. — 1° Si une fonction $y = f(x)$ est constante sur $[a, b]$, sa dérivée est nulle sur $[a, b]$ car (n° 99) :

$$f(x) = C \implies f'(x) = 0$$

2° Si la fonction $y = f(x)$ est croissante sur $[a, b]$ le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ est positif quels que soient x et x_1. Sa limite $f'(x)$ lorsque x_1 tend vers x ne saurait être négative. Elle est donc *positive* ou *nulle.*

3° Si la fonction $y = f(x)$ est décroissante sur $[a, b]$ le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est cette fois négatif et sa limite $f'(x)$ est *négative* ou *nulle.*

113. Théorème fondamental. — ***Une fonction dérivable $f(x)$ est constante sur tout intervalle où sa dérivée $f'(x)$ est nulle. Elle est croissante sur tout intervalle où sa dérivée est positive. Elle est décroissante sur tout intervalle où sa dérivée est négative.***

Nous admettrons ce théorème, qui n'est pas entièrement évident par réciprocité, mais qui peut être démontré rigoureusement. Remarquons que :

1° *La dérivée d'une fonction monotone croissante ou décroissante ne peut s'annuler que pour des valeurs isolées de la variable.*

Si la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$, croissante ou décroissante sur $[a, b]$, s'annulait sur un segment $[c, d] \subset [a, b]$, elle serait constante sur $[c, d]$.

2° *Lorsque deux fonctions ont même dérivée sur un intervalle donné, leur différence est constante sur cet intervalle.*

Si, sur $[a, b]$, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ ont des dérivées égales, la fonction : $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ admet pour dérivée : $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, nulle en tout point de $[a, b]$. Donc $\varphi(x) = f(x) - g(x) = C$ sur $[a, b]$.

$$\forall x \in [a, b], \qquad f'(x) = g'(x) \iff f(x) - g(x) = C.$$

114. Application à la variation de la fonction $y = f(x)$. — Le théorème précédent remplace avantageusement la règle du n° 79 pour l'étude d'une fonction dérivable $y = f(x)$.

L'existence de $f'(x)$ entraîne la continuité de $f(x)$ sur tout intervalle où $f'(x)$ est définie. Le signe de $f'(x)$ permet de distinguer les intervalles où la fonction $f(x)$ est soit crois-

sante soit décroissante. On peut alors établir un tableau de variation que l'on complète par l'indication des valeurs remarquables de $f(x)$: maxima, minima, valeurs limites aux bornes des divers intervalles du tableau, tel que :

x	a		b		c		d		e
y'		+	0	−	0	+	0	+	
$y = f(x)$	$f(a)$	↗	$f(b)$	↘	$f(c)$	↗	$f(d)$	↗	$f(e)$

La fonction $y = f(x)$ est croissante sur chacun des segments $[a, b]$, $[c, d]$ et $[d, e]$. Elle est décroissante sur le segment $[b, c]$.

Elle admet pour $x = b$ un ***maximum*** $f(b)$, pour $x = c$, un ***minimum*** $f(c)$ car $f'(x)$ s'annule en changeant de signe pour $x = b$ et $x = c$. Par contre $f'(x)$ s'annule sans changer de signe pour $x = d$, la fonction $f(x)$ croissante sur les deux segments consécutifs $[c, d]$ et $[d, e]$ est croissante sur le segment $[c, e]$.

L'étude de la fonction sera complétée par la représentation graphique de la fonction (n° 86).

COURBES D'ÉQUATION $y = f(x)$

115. Tangente à la courbe $y = f(x)$. — Rappelons que (n° 94) :

Le coefficient directeur de la tangente au point $M(x, y)$ ***de la courbe*** (C) ***d'équation*** $y = f(x)$ ***est égal à*** $y' = f'(x)$.

Cette tangente (fig. 29) est donc le support du vecteur $\overrightarrow{MT}$ de composantes $(1, y')$ ou (a, ay'). On peut ainsi effectuer un tracé précis de (C) par points et tangentes. On conservera sur le graphe les tangentes horizontales ($y' = 0$) parallèles à Ox, les tangentes d'inflexion ($y'' = 0$) et les tangentes aux extrémités des arcs de (C) situés à distance finie.

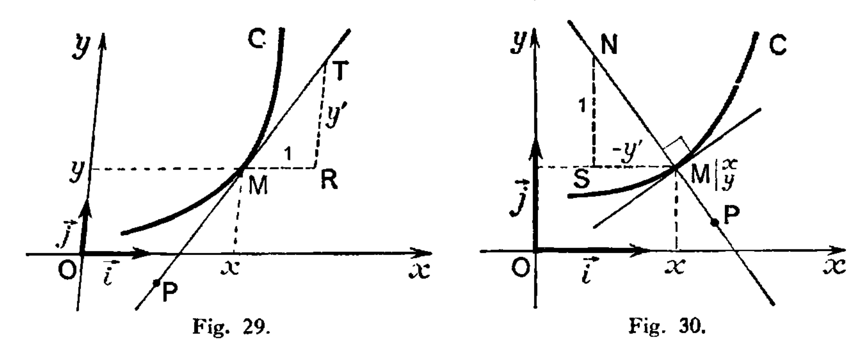


Fig. 29. Fig. 30.

Si P (X, Y) désigne le point courant de cette tangente (fig. 29), son équation s'obtient en écrivant que :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y - y}{X - x} = y' \iff \boxed{Y - y = y'(X - x)} \quad (1)$$

ou en fonction de x seulement : $$Y = f(x) + (X - x)f'(x) \quad (2)$$

116. Normale à la courbe $y = f(x)$. — Dans un repère orthonormé les directions de coefficients directeurs m et m' sont perpendiculaires si $1 + mm' = 0$, c'est-à-dire si $m' = -\frac{1}{m}$. Il en résulte que :

Dans un repère orthonormé, le coefficient directeur de la normale au point $M(x, y)$ ***de la courbe*** $y = f(x)$ ***est égal à*** $-\frac{1}{y'}$.

Cette normale (g. 30) est donc le support du vecteur $\overrightarrow{MN}$ de composantes $\left(1, -\frac{1}{y'}\right)$ ou $(-y', 1)$ et son équation s'écrit :

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \iff \boxed{X + y'Y - x - yy' = 0} \qquad (1)$$

ou en fonction de x seulement :

$$X + Yf'(x) - x - f(x)f'(x) = 0 \qquad (2)$$

117. Exemples.

1° La tangente MT à la courbe $y = -x^2 + 2x + 3$ (fig. 31) au point M ($x = 2, y = 3$) a pour coefficient directeur $y' = -2x + 2 = -2$. Son équation s'écrit (n° 115) :

$$Y - 3 = -2(X - 2) \iff Y = -2X + 7 \quad \text{ou} \quad y = -2x + 7.$$

Cette tangente coupe l'axe Ox au point ($x = \frac{7}{2}$; $y = 0$), l'axe Oy au point ($x = 0$, $y = 7$).

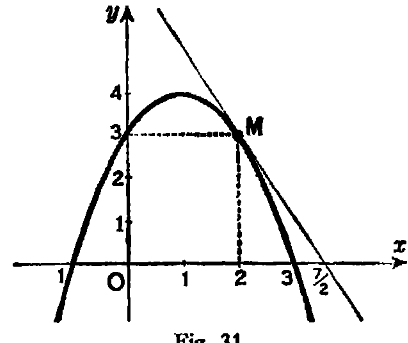


Fig. 31.

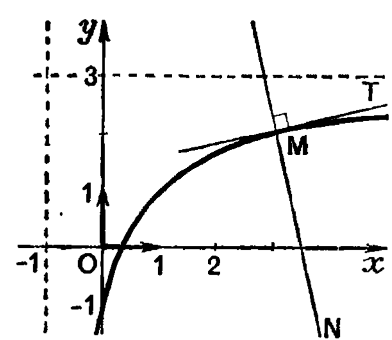


Fig. 32.

2° La tangente MT à la courbe $y = \frac{3x - 1}{x + 1}$ (fig. 32) au point $M(x = 3, y = 2)$ a pour coefficient directeur $y' = \frac{4}{(x + 1)^2} = \frac{1}{4}$. Son équation est donc :

$$Y - 2 = \frac{1}{4}(X - 3) \iff Y = \frac{X}{4} + \frac{5}{4} \quad \text{ou} \quad y = \frac{x + 5}{4}$$

Le repère xOy étant orthonormé, la normale MN au point M a pour coefficient directeur $-\frac{1}{y'} = -4$. L'équation de cette normale est donc :

$$Y - 2 = -4(X - 3) \iff Y = -4X + 14 \quad \text{ou} \quad y = -4x + 14.$$

118. Applications. — 1° ***Tangentes parallèles à la droite*** $y = mx$.

On obtient les abscisses des points de contact en résolvant l'équation : $f'(x) = m$.

Ainsi les abscisses des points de contact des tangentes à la courbe $y = \frac{x-3}{x-1}$ admettant pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$, vérifient la relation $y' = \frac{1}{2}$. D'où :

$$\frac{2}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \iff (x-1)^2 = 4 \quad \text{ou} \quad x = 1 \pm 2.$$

On obtient $x = -1$ et $x = 3$ qui correspondent aux points de contact (fig. 33) :

$$\text{A}(-1\,;\,+2) : \quad \text{Tangente} : y - 2 = \frac{1}{2}(x+1) \iff y = \frac{x+5}{2}.$$

$$\text{B}(+3;\,0) : \quad \text{Tangente} : y - 0 = \frac{1}{2}(x-3) \iff y = \frac{x-3}{2}$$

Remarquons que l'on retrouve ces résultats en cherchant pour quelles valeurs de p la droite $y = \frac{x}{2} + p$ coupe la courbe en deux points confondus.

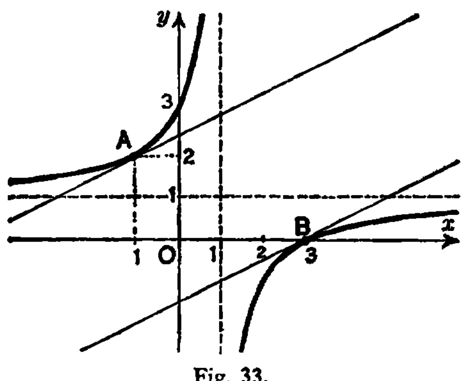


Fig. 33.

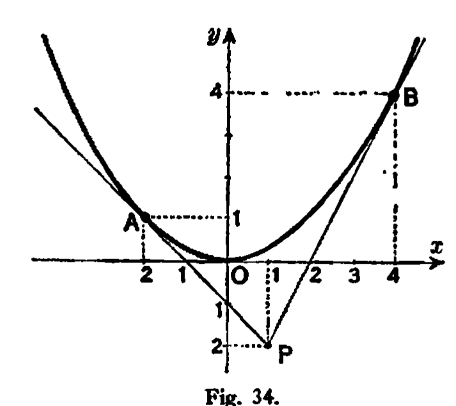


Fig. 34.

2° ***Tangentes issues du point donné*** P(α, β). — Il suffit de déterminer x pour que l'équation de la tangente en $M(x, f(x))$: $Y - f(x) = (X - x) f'(x)$ soit vérifiée pour $X = \alpha$ et $Y = \beta$. On obtient l'équation : $\beta - f(x) = (\alpha - x) f'(x)$.

Ainsi (fig. 34) la tangente à la courbe $y = \frac{x^2}{4}$ au point $M\left(x\,;\,\frac{x^2}{4}\right)$ a pour équation :

$$Y - \frac{x^2}{4} = \frac{x}{2}(X - x) \iff x^2 - 2xX + 4Y = 0$$

Écrivons que cette tangente passe par le point P($X = 1$, $Y = -2$), on obtient : $x^2 - 2x - 8 = 0$ dont les racines -2 et $+4$ correspondent aux points de contact A(-2; $+1$) et B($+4$; $+4$). On peut vérifier que les tangentes correspondantes : $y = -x - 1$ et $y = 2x - 4$ sont issues de P(1, -2).

Remarque. — On peut retrouver ces résultats en cherchant pour quelles valeurs de m, la droite $y + 2 = m(x - 1)$ issue de P coupe la courbe en deux points confondus.

119. Concavité d'un arc de courbe. — L'axe Oy du repère cartésien xOy étant supposé vertical, on dit qu'un arc de la courbe $y = f(x)$ tourne sa concavité du côté des y positifs ou du côté des y négatifs suivant qu'il se trouve tout entier situé au-dessus ou au-dessous de la tangente en l'un quelconque de ses points.

On voit, géométriquement, sur les figures 35 et 36, que le coefficient directeur $y' = f'(x)$ de la tangente en $M(x, y)$ est une fonction de x, croissante dans le premier cas, décroissante

dans le second. La concavité d'un arc de courbe est donc déterminée par le signe de $y''=f''(x)$ et nous admettrons que :

Une courbe $y = f(x)$ tourne sa concavité du côté des y positifs sur tout intervalle où y'' est positif, du côté des y négatifs sur tout intervalle où y'' est négatif.

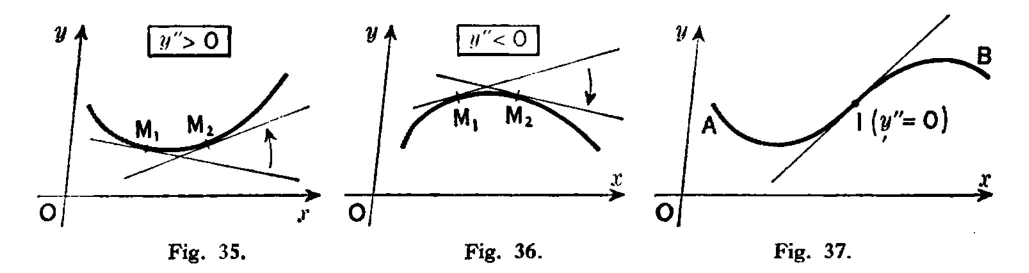


Fig. 35. Fig. 36. Fig. 37.

120. Points d'inflexion. — Un point I de l'arc AB de la courbe $y = f(x)$ est un point d'inflexion si les deux arcs AI et IB sont de part et d'autre de la tangente en I (fig. 37). Un tel point correspond donc à un changement de concavité, c'est-à-dire à un changement de signe de y''.

La courbe $y = f(x)$ admet un point d'inflexion pour toute valeur de x pour laquelle y'' change de signe.

Les points d'inflexion sont en général des points pour lesquels on a $y'' = 0$, ou éventuellement des points pour lesquels y'' devient infini.

EXEMPLE. — La courbe $y = x^3 - x$ admet le point O comme point d'inflexion car $y'' = 6x$ s'annule en changeant de signe pour $x = 0$.

121. Asymptotes. — ***On dit que la droite Δ est une asymptote de la courbe (C) si la distance MH, du point M à la droite Δ, tend vers zéro lorsque M s'éloigne indéfiniment sur la courbe.***

On dit aussi que la courbe (C) est asymptote à la droite Δ (fig. 38 et 39) (le mot asymptote s'emploie comme le mot tangente).

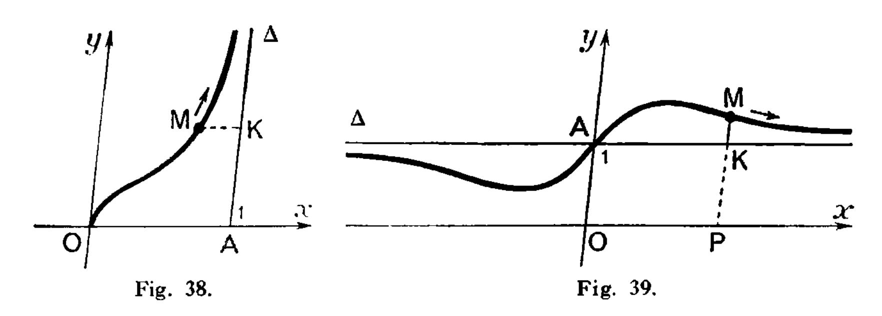


Fig. 38. Fig. 39.

1° Ainsi (fig. 38) la courbe $y = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ est asymptote à la droite $x = 1$ car lorsque x tend vers 1 à gauche, y tend vers $+\infty$. Le point M s'éloigne indéfiniment sur la courbe et la distance $MH \leqslant MK = |1 - x|$ tend vers 0.

2° La courbe $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$ est asymptote à la droite $y = 1$ (fig. 38) lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ car $MH \leqslant MK = \frac{|x|}{x^2 + 1}$ tend vers 0.

On voit ainsi que :

La courbe $y = f(x)$ est asymptote à la droite $x = a$ si $f(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers a (à gauche ou à droite). Elle est asymptote à la droite $y = b$ si $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).

On obtient les asymptotes parallèles à Oy en cherchant les racines de l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$.
Lorsque $f(x)$ admet deux limites distinctes b et c suivant que x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la courbe admet les deux asymptotes horizontales $y = b$ et $y = c$.

Ainsi la fonction impaire $y = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - 4}$ admet les quatre asymptotes : $x = 2$, $x = -2$, $y = 1$ et $y = -1$.

122. Résumé. — La marche à suivre pour l'étude et la représentation graphique d'une fonction peut se résumer ainsi :

1° On étudie les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie et continue.
On calcule la dérivée $y' = f'(x)$ et on étudie son signe, en déterminant les intervalles où elle garde un signe constant.

2° On établit un tableau de variation indiquant dans chaque intervalle le sens de variation par une flèche ↗ ou ↘, les valeurs limites de y et y' aux bornes de ces intervalles, les maxima et les minima.

3° On calcule y'' et on détermine la concavité et les points d'inflexion de la courbe $y = f(x)$ (Les résultats peuvent être inclus dans le tableau précédent.) Puis, s'il y a lieu, on recherche les asymptotes parallèles aux axes.

4° On construit la courbe représentative en utilisant les résultats trouvés ainsi que les éléments de symétrie ou de translation que la courbe peut présenter. On détermine, en plus, autant de points et tangentes particuliers que cela est nécessaire pour assurer un tracé précis que l'on effectuera d'un trait noir et bien ferme. Utiliser toujours une échelle assez grande.
Les indications des axes et des coordonnées remarquables seront portées correctement. Les asymptotes et les tangentes particulières seront tracées en trait fin noir ou de couleur.

EXERCICES

— Étudier les variations des fonctions suivantes et déterminer la tangente à la courbe représentative aux points dont l'abscisse x est indiquée.

477. $y = \frac{x^2}{2}$ pour $x = 1$; $x = -2$ et $x = 3$.

478. $y = -2x^2 + 5x + 3$ pour $x = 0$; $x = 1$ et $x = 2$.

479. $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$ pour $x = -2$; $x = 0$ et $x = 3$.

480. $y = \frac{1}{4}(x - 3)(x + 4)$ pour $x = -\frac{3}{2}$; $x = 0$ et $x = \frac{5}{2}$.

481. $y = \frac{x-2}{x-1}$ pour $x = -1$; $x = 0$ et $x = 2$.

482. $y = \frac{2x}{x+2}$ pour $x = -4$; $x = -1$ et $x = 0$.

483. $y = \frac{3x+1}{x+1}$ pour $x = -2$; $x = 0$ et $x = 1$.

484. $y = \frac{6x-5}{2x-1}$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$.

— Construire les tangentes aux graphes des fonctions suivantes, aux intersections avec Ox.

485. $y = \frac{x^2}{4} - 1$; $y = (x^2 - 1)^2$; $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

486. $y = \frac{x-2}{x+2}$; $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$; $y = \frac{(x-2)^2}{x+2}$.

487. $y = x^3 - x$; $y = \sqrt{x^3 - x}$; $y = (x^3 - x)^2$

488. $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$; $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$; $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$.

489. 1° Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = \frac{x^2}{2}$ au point d'abscisse $x = m$.

2° En déduire le point où la tangente a pour coefficient directeur $+ 2$, puis les équations et les points de contact des tangentes issues du point P$\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.

490. 1° Déterminer le point de contact et l'équation de la tangente à la courbe $y = \frac{x^2}{2} - 2x + 3$ dont le coefficient directeur est -1.

2° Équations et points de contact des tangentes issues du point A$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

491. Construire la courbe : $y = \frac{x^2}{4} - x + 3$, puis déterminer et construire :

1° La tangente au point A d'abscisse $x = 4$.

2° La tangente de coefficient directeur -1.

3° Les tangentes issues du point P$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

492. Établir l'équation de la tangente à la courbe $y = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse $x = m$.

2° En déduire les tangentes parallèles à la droite $x + 4y = 0$, puis les tangentes issues du point P$(-2, +4)$ et leurs points de contact.

493. 1° Former l'équation de la tangente à la courbe $y = \frac{x-1}{x+1}$ au point d'abscisse $x = m$.

2° Déterminer les tangentes issues du point P$(x = 1, y = 4)$ et les coordonnées de leurs points de contact.

494. 1° Étudier les variations du trinôme : $y = \frac{x^2}{2} - 2x - 6$.

Tracer la courbe représentative (P). Trouver l'équation de la tangente au point A d'abscisse 4 et tracer cette tangente.

2° Calculer les coordonnées des points d'intersection B et C de (P) avec la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x - 3$. Équations des tangentes en B et C.

3° Tracer sur un nouveau graphique la courbe (P) et la droite (D) d'équation $y = m$. Utiliser ce graphique pour étudier suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des racines de l'équation :

$$x^2 - 4x - 2(m + 6) = 0.$$

— Déterminer les asymptotes parallèles aux axes des courbes suivantes :

495. $y = \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x^2 - 4x + 3}$.

496. $y = \dfrac{x + 5 + \sqrt{4x^2 + 3}}{x - 2}$.

497. $y = \dfrac{4x^2 + x - 5}{3x^2 - 14x + 15}$.

498. $y = \dfrac{(x - 4)\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^2 + x - 6}$.

499. $y = \dfrac{12x^3 - 5x + 4}{(x^2 - 6x + 3)^2 - (x^2 - 4x + 9)^2}$.

500. $y = \dfrac{2x^2 + 3 - x\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - 3x - 4}$.

501. On considère les courbes (C_1) et (C_2) d'équations : $y_1 = x^2 - 4x - 1$ et $y_2 = x^2 + 6x + 4$, construites dans un même repère rectangulaire.

1° Ces deux courbes ont un point commun, A; calculer ses coordonnées.

2° Tracer avec précision les tangentes aux deux courbes au point A. Quelle remarque peut-on faire sur ces droites ?

3° On coupe les deux courbes par une même parallèle, D, à l'axe des x, d'ordonnée m; D rencontre (C_1) en M_1 et M'_1 et (C_2) en M_2 et M'_2. Montrer que $M_1M'_1 = M_2M'_2$ quel que soit m.

502. Soient les deux fonctions : $y_1 = \dfrac{2x}{x - 2}$ et $y_2 = x^2 - x$.

1° Étudier les variations de ces deux fonctions et construire dans un même repère rectangulaire leurs courbes représentatives (H) et (P).

2° Montrer que ces deux courbes ont même tangente en O. Construire cette tangente. Calculer les coordonnées du second point d'intersection des deux courbes et déterminer les équations des tangentes en ce point.

503. 1° Tracer dans un même repère rectangulaire la parabole (P) : $y = \dfrac{x^2}{2}$ et l'hyperbole (H) : $y = \dfrac{4}{x}$. Montrer qu'elles se coupent en un seul point A dont on donnera les coordonnées.

2° Établir les équations des droites (D_1) et (D_2) respectivement tangentes en A à (P) et à (H). Déterminer le point M_1 où la droite (D_1) recoupe (H) et le point M_2 où la droite (D_2) recoupe (P).

3° Former l'équation de la droite M_1M_2 et établir que la droite M_1M_2 est tangente à (H) en M_1 et à (P) en M_2.

504. 1° Construire dans un même repère rectangulaire les courbes C_1 et C_2 représentant respectivement les fonctions :

$$y = x^2 - 4x + 5 \quad \text{et} \quad y = +\frac{2}{x}.$$

2° Vérifier que le point A de coordonnées $x = 1, y = 2$ est commun aux deux courbes et montrer que les deux courbes admettent même tangente en A. Équation de cette tangente.

3° On considère la droite d'équation $y = mx - m + 2$. Montrer qu'elle passe par A et calculer en fonction de m les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec C_1 et C_2.

4° En déduire que les courbes C_1 et C_2 se recoupent en un point unique B distinct de A. Établir les équations des tangentes en B aux deux courbes.

505. Soit la fonction $y = \dfrac{mx + 2}{m + x - 1}$ où x est la variable, m un paramètre. A chaque valeur de m correspond une fonction y et une courbe C_m représentative des variations de y.

1° On pose $m = 3$. Construire la courbe C_3 correspondante et déterminer les abscisses des points de cette courbe tels que la tangente à C_3 en ces points ait pour coefficient directeur 4.

2° Écrire les équations des asymptotes de la courbe C_m en fonction de m. Lieu de leur point de concours quand m varie.

3° Montrer que les courbes C_m passent par deux points fixes A et B. Calculer leurs coordonnées et calculer, en fonction de m, le coefficient directeur de la tangente en chacun de ces deux points.

4° Dire, suivant les valeurs de m, le sens des variations de la fonction. Cas particuliers.

506. On donne la fonction $y = \dfrac{mx + m + 2}{-x + m + 1}$. A chaque valeur du paramètre m il correspond une courbe (H) représentant cette fonction.

1° Étudier la variation de cette fonction et préciser son sens pour les différentes valeurs de m. On prend $m = 1$. Représenter graphiquement la fonction et trouver l'équation de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $x = 1$.

2° Combien passe-t-il de courbes (H) par chaque point P du plan de coordonnées α et β ? Lieu du centre de symétrie de (H) ? Comment ce lieu est-il décrit quand m varie de $-\infty$ à $+\infty$?

3° Pour quelles valeurs de m, (H) rencontre-t-elle la droite $y = 2x$? Quand il y a deux intersections on les désigne par $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$. Montrer qu'il existe entre $x_1 + x_2$ et x_1x_2 une relation indépendante de m.

ÉTUDE DE LA FONCTION : $y = ax^2$

123. Fonction $y = x^2$. — La fonction $y = x^2$ est définie et continue quel que soit x. Elle est nulle pour $x = 0$, positive pour $x \neq 0$ et à deux valeurs opposées : $x = \pm \alpha$, correspond la même valeur $y = \alpha^2$. La fonction $y = x^2$ est une fonction paire.

Sa dérivée $y' = 2x$ est négative pour $x < 0$, positive pour $x > 0$. Comme d'autre part y tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers $\pm\infty$, on peut établir le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
$y = x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

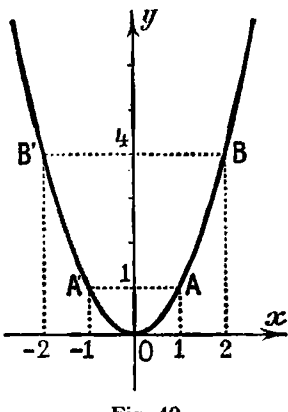
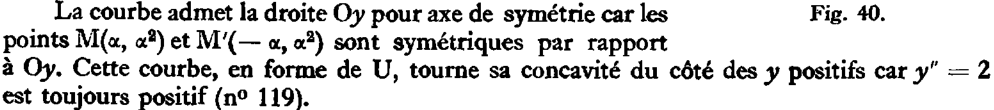


Fig. 40.

La fonction $y = x^2$ est donc décroissante pour x négatif, croissante pour x positif. Elle admet pour $x = 0$ un minimum égal à 0.

GRAPHE DE LA FONCTION $y = x^2$. — Dans le plan rapporté au repère rectangulaire xOy (fig. 40) construisons les points O (0, 0); A (1, 1); A' (− 1, 1); B (2, 4); B' (− 2, 4), etc. En joignant tous ces points par une courbe continue nous obtenons le graphe de la fonction $y = x^2$.



La courbe admet la droite Oy pour axe de symétrie car les points $M(\alpha, \alpha^2)$ et $M'(-\alpha, \alpha^2)$ sont symétriques par rapport à Oy. Cette courbe, en forme de U, tourne sa concavité du côté des y positifs car $y'' = 2$ est toujours positif (n° 119).

Le point O situé sur l'axe de symétrie est le *sommet* de la courbe. Comme $x = 0 \Longrightarrow y' = 2x = 0$, *la tangente au sommet* est la droite Ox. En construisant la courbe à une grande échelle, on met en évidence la forme arrondie de la courbe au voisinage du sommet.

124. Étude de la fonction : $y = ax^2$. — La fonction $y = ax^2$ est définie et continue quel que soit x. C'est une fonction paire, nulle pour $x = 0$, du signe de a pour $x \neq 0$.

La dérivée $y' = 2\,ax$ est du signe de a pour $x > 0$, du signe opposé pour $x < 0$. Comme y devient infini en même temps que x^2, on obtient :

1[er] **Cas** : *a positif*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2[e] **Cas** : *a négatif*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

La fonction $y = ax^2$ admet pour $x = 0$, un minimum égal à 0 lorsque a est positif, un maximum égal à 0 lorsque a est négatif.

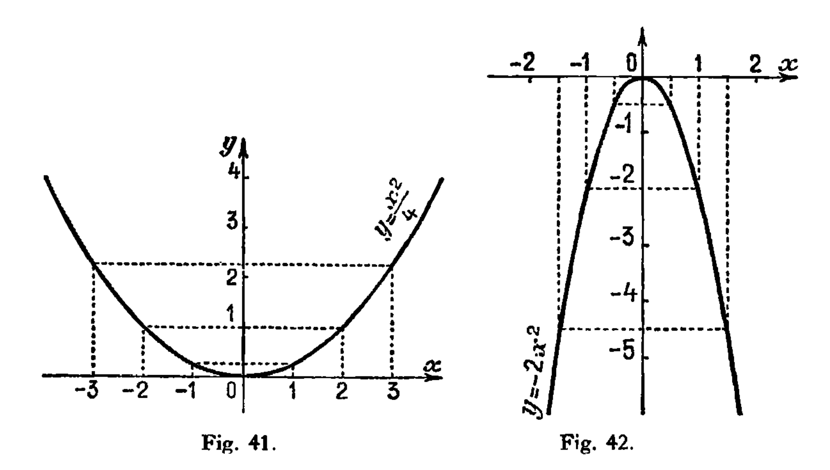


Fig. 41. Fig. 42.

Dans un repère rectangulaire xOy, la courbe $y = ax^2$ se déduit de la courbe $y = x^2$ dans l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport a. Comme $y'' = 2\,a$, elle tourne sa concavité du côté des y positifs (fig. 41) pour $a > 0$, du côté des y négatifs (fig. 42) pour $a < 0$.

Elle admet, comme la courbe $y = x^2$, l'axe Oy pour *axe de symétrie* et l'axe Ox pour tangente au sommet.

125. Théorème. — ***Dans un repère orthonormé, la courbe $y = ax^2$ est la parabole de foyer F $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ et dont la directrice D est la droite $y = -\frac{1}{4a}$.***

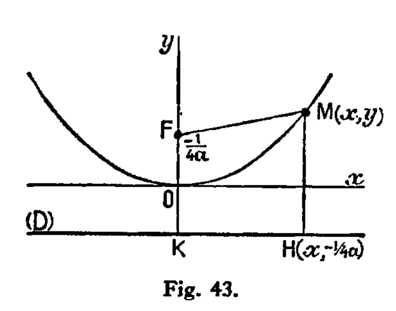


Fig. 43.

On vérifie (fig. 43) que tout point M équidistant de F et de D satisfait à la condition $\overline{MF}^2 = \overline{MH}^2$

$$\text{soit :} \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2$$

On obtient : $\quad x^2 = \frac{y}{a} \quad$ ou $y = ax^2$.

La longueur $\overline{KF} = \frac{1}{2\,a}$ est appelée *paramètre* de la parabole.

Si au lieu d'un repère orthonormé on utilise un repère rectangulaire tel que $|\vec{j}| = 3\,|\vec{i}|$ par exemple, cela revient à construire la courbe $y = 3\,ax^2$ dans le repère orthonormé associé au vecteur $\vec{i}$. La courbe reste donc une parabole. D'après la définition géométrique toutes les paraboles, et par suite toutes les courbes $y = ax^2$ sont semblables.

126. Résumé. — ***La courbe $y = ax^2$ est une parabole de sommet* O, *admettant y'y pour axe de symétrie et x'x pour tangente au sommet.***

Pour construire correctement la courbe, il faut toujours prendre une unité assez grande et construire un nombre suffisant de points.

On pourra s'aider du fait que lorsque l'abscisse est multipliée (ou divisée) par 2 ou 3, l'ordonnée est multipliée (ou divisée) par 4 ou 9. Ainsi (fig. 44), connaissant seulement le point A et le sommet O de la parabole $y = ax^2$, on obtiendra facilement sur du papier quadrillé les points B, C et D, cequi donnera, en complétant par symétrie par rapport à l'axe Oy, neuf points sans calculs.

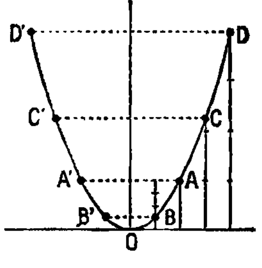


Fig. 44.

127. Tangente et normale à la parabole $y = ax^2$. — 1° L'équation de la tangente en M(x, y) à la parabole $y = ax^2$, s'écrit puisque $y' = 2\,ax$ (n° 115) :

$$Y - y = 2ax(X - x) \Longleftrightarrow \boxed{Y = 2ax\,X - ax^2}$$

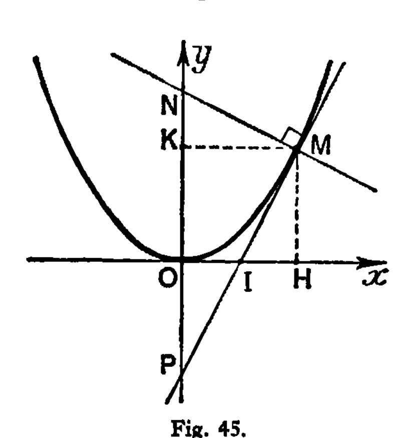


Fig. 45.

Désignons par H et K les projections orthogonales de M(x, y) sur les axes Ox et Oy (fig. 45). On voit que la tangente coupe Ox au point I $\left(\frac{x}{2}, 0\right)$, milieu de OH et qu'elle coupe Oy au point P $(0, -ax^2)$, symétrique de K par rapport au point O. On dit que :

Le sommet O *de la parabole est le milieu de la sous-tangente* PK *relative à son axe* Oy.

2° Dans un repère orthonormé l'équation de la normale en M(x, y) s'écrit puisque $y' = 2\,ax$ (n° 116) : $X - x + 2\,ax\,(Y - y) = 0$.

Cette normale coupe Oy au point N tel que $X = 0$ et d'ordonnée $Y = y + \frac{1}{2a}$.

Le segment $\overline{KN} = Y - y = \frac{1}{2a}$ est constant et égal au paramètre (n° 125).

La sous-normale relative à l'axe de la parabole est constante et égale au paramètre de cette parabole.

ÉTUDE DE LA FONCTION : $y = ax^2 + bx + c$

128. Exemple I. — *Étude de la fonction :* $y = x^2 - 2x - 3$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit x. Sa dérivée : $y' = 2(x - 1)$ s'annule pour $x = 1$, est positive pour $x > 1$, négative pour $x < 1$.

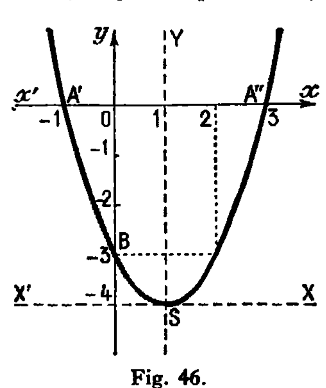


Fig. 46.

Comme $y = x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$ on voit, lorsque x tend vers $\pm\infty$, que y est le produit de x^2 par un facteur qui tend vers 1. Donc y tend vers $+\infty$. On obtient :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

La fonction $y = x^2 - 2x - 3$ *est donc décroissante lorsque* x *varie de* $-\infty$ *à* $+1$, *croissante lorsque* x *varie de* $+1$ *à* $+\infty$.

Elle admet pour $x = 1$ un minimum égal à -4.

GRAPHE. — Dans un repère rectangulaire xOy (fig. 46) la courbe représentative admet pour sommet le point $S(+1, -4)$. Comme $y'' = 2$, elle tourne sa concavité du côté des y positifs. Cette courbe coupe Oy au point $B(0; -3)$ et Ox aux points A' et A'' dont les abscisses x' et x'' sont les racines de l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$, soit $x' = -1$ et $x'' = 3$.

ÉQUATION RÉDUITE. — Désignons par XSY le repère rectangulaire qui se déduit de xOy dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}$ $(+1; -4)$. Les formules du changement de repère (nº 91) : $x = 1 + X$ et $y = -4 + Y$ montrent que l'équation de la courbe qui s'écrit $y + 4 = (x - 1)^2$ devient : $Y = X^2$.

La courbe est donc une parabole, égale à la parabole $y = x^2$, admettant le point S pour sommet la droite SY d'équation $x = 1$ pour axe de symétrie et la droite SX pour tangente au sommet.

129. Exemple II. — *Étude de la fonction :* $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

La fonction est définie et continue quel que soit x. La dérivée : $y' = -x + 2$ s'annule pour $x = 2$. Elle est positive pour $x < 2$, négative pour $x > 2$.

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, $y = -\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$ tend comme $-\frac{x^2}{2}$, vers $-\infty$. On obtient :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

La fonction $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ *est croissante lorsque* x *varie de* $-\infty$ *à* 2, *décroissante lorsque* x *varie de* 2 *à* $+\infty$.

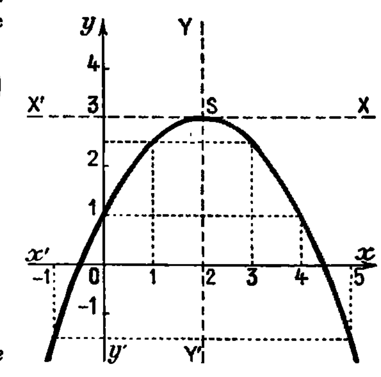


Fig. 47.

Elle admet pour $x = 2$ un maximum égal à 3. Pour $x = 0$, on obtient $y = 1$ et $y = 0$ pour : $-x^2 + 4x + 2 = 0$ soit pour $x = 2 \pm \sqrt{6}$.

Graphe. — Dans le repère rectangulaire xOy la courbe représentative admet le point S(+ 2, + 3) pour sommet. Comme $y'' = -1$, elle tourne sa concavité du côté des y négatifs (fig. 47).

Soit XSY le repère rectangulaire qui se déduit de xOy dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}(+2; +3)$. On obtient (nº 91) : $x = 2 + X$ et $y = 3 + Y$.

L'équation de la courbe qui s'écrit $y - 3 = -\frac{1}{2}(x-2)^2$ devient $Y = -\frac{X^2}{2}\cdot$ La courbe est donc une parabole égale la parabole $y = -\frac{x^2}{2}\cdot$ Elle admet comme axe de symétrie la droite $x = 2$ et pour tangente au sommet la droite $y = 3$.

130. Cas général : $y = ax^2 + bx + c$.

Tout trinôme du second degré en x de la forme $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

C'est une fonction de x, définie et continue pour toute valeur de x.

Sa dérivée $y' = 2ax + b = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ s'annule pour $x = -\frac{b}{2a}\cdot$ Elle est du signe de a pour $x > -\frac{b}{2a}$, du signe opposé pour $x < -\frac{b}{2a}$.

Pour $x = -\frac{b}{2a}$ on obtient : $y = \frac{4ac - b^2}{4a}\cdot$ D'autre part pour $x \neq 0$, on peut écrire : $y = x^2\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)\cdot$ Lorsque x tend vers $\pm\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ et le facteur entre parenthèses tend vers a. Donc y tend vers $+\infty$ lorsque a est positif, vers $-\infty$ lorsque a est négatif. On peut donc établir les tableaux de variations :

1er Cas : *a positif*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$+\infty$

2e Cas : *a négatif*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↘	$-\infty$

La fonction* $y = ax^2 + bx + c$ *admet pour* $x = -\frac{b}{2a}$, *la valeur* $\frac{4ac - b^2}{4a}$ *pour minimum ou pour maximum suivant que* a *est positif ou négatif.

Notons que la valeur $\frac{4ac - b^2}{4a}$ est $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ en désignant par $f(x)$ le trinôme $y = ax^2 + bx + c$.

131. Représentation graphique. — Le plan étant rapporté à un repère rectangulaire xOy, la courbe $y = ax^2 + bx + c$ admet le point S $\left(x = -\frac{b}{2a};\ y = \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ pour sommet. Comme $y'' = 2a$, cette courbe tourne sa concavité du côté des y positifs pour $a > 0$ (fig. 48), du côté des y négatifs pour $a < 0$ (fig. 49).

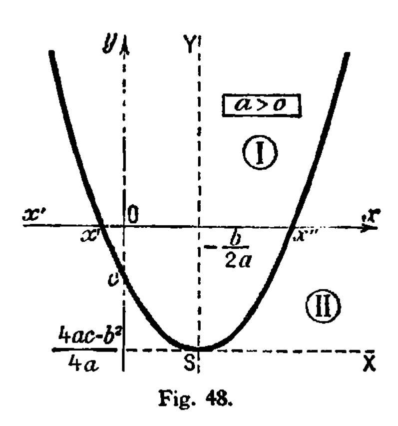


Fig. 48.

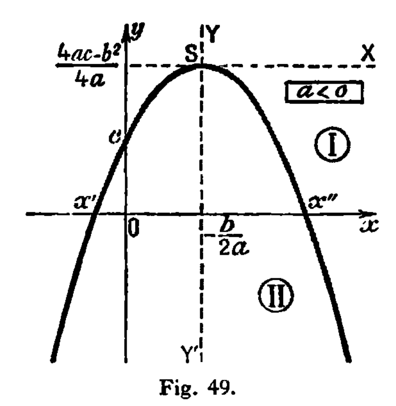


Fig. 49.

Soit XSY le repère rectangulaire qui se déduit de xOy dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}$. Les formules de changement de repère (n° 91) : $x = -\frac{b}{2a} + X$ et $y = \frac{4ac - b^2}{4a} + Y$ montrent que l'équation de la courbe $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ devient :

$$\boxed{Y = aX^2}$$

La courbe $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole admettant pour axe de symétrie la droite $x = -\frac{b}{2a}$ et pour tangente au sommet la droite $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Dans un repère orthonormé xOy, on peut vérifier que la courbe est le lieu des points équidistants du foyer F $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$ et de la directrice Δ $\left(y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}\right)$.

La parabole $y = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe Oy au point B$(0, c)$. Lorsque $b^2 - 4ac$ est positif, elle coupe l'axe Ox pour $ax^2 + bx + c = 0$. On obtient alors deux points d'intersection A′ et A″ d'abscisses respectives :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Notons que la courbe partage le plan en deux régions :

La région (I), au-dessus de la courbe, où : $y > ax^2 + bx + c$.

La région (II), au-dessous de la courbe, où : $y < ax^2 + bx + c$.

On pourra ainsi résoudre graphiquement toute inéquation de la forme :

$$Ax^2 + Bx + Cy + D > 0.$$

132. Cas particuliers. 1er cas : $c = 0$. — La courbe $y = ax^2 + bx$ passe par l'origine (fig. 50) et recoupe Ox au point d'abscisse $-\frac{b}{a}$.

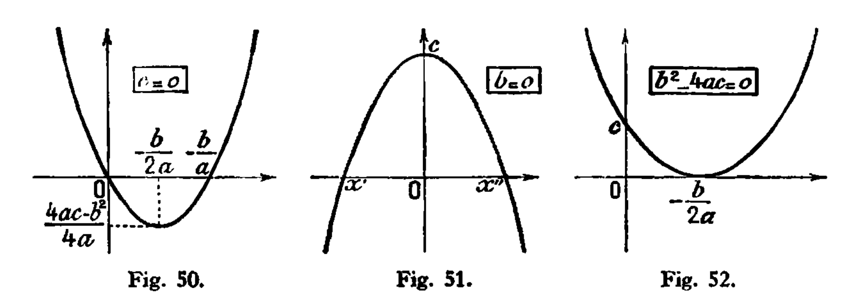


Fig. 50. Fig. 51. Fig. 52.

2e cas : $b = 0$. La courbe $y = ax^2 + c$ admet pour axe de symétrie la droite $y'y$ (fig. 51) et si $ac < 0$, elle coupe Ox aux points : $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

3e cas : $b^2 - 4ac = 0$. La courbe $y = ax^2 + bx + c$ a son sommet sur l'axe $x'x$ (fig. 52) et admet cette droite pour tangente au sommet, au point d'abscisse : $x = -\frac{b}{2a}$.

133. Tangente et normale à la parabole $y = ax^2 + bx + c$. — Puisque $y' = 2ax + b$ la tangente au point M(x, y) à la parabole $y = ax^2 + bx + c$ s'écrit (n° 115)

$$Y - y = (2ax + b)(X - x) \implies \boxed{Y = (2ax + b)X + c - ax^2} \quad (1)$$

De même, dans un repère orthonormé, l'équation de la normale en M(x, y) à cette parabole s'écrit (n° 116) :

$$\boxed{X - x + (2ax + b)(Y - y) = 0} \quad (2)$$

134. Intersection d'une droite et d'une parabole. — L'équation aux abscisses des points d'intersection de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ et de la droite D : $y = mx + p$ s'écrit : $ax^2 + (b - m)x + c - p = 0$.

La droite D est donc (fig. 53) sécante, tangente ou extérieure à la parabole suivant que

$$\Delta = (m - b)^2 - 4a(c - p)$$

est positif, nul ou négatif.

Le milieu I de la sécante M'M'' d'équation $y = mx + p$ a pour coordonnées :

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2} = \frac{m - b}{2a};$$

$$y_1 = mx_1 + p = \frac{m(m - b)}{2a} + p.$$

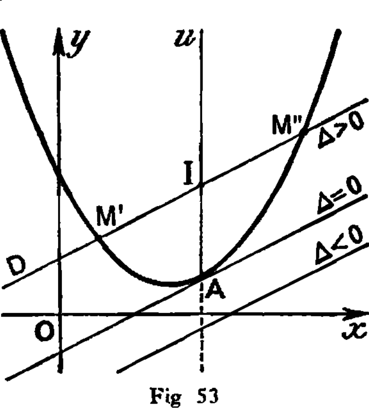


Fig 53

Si p varie, m restant fixe, la sécante M'M'' varie en restant parallèle à la direction $y = mx$ et le point I se déplace sur la droite $x = \frac{m - b}{2a}$ ou $2ax + b = m$, appelée *diamètre conjugué de la direction* $y = mx$. L'extrémité A, sur la parabole, de ce diamètre est le point où la tangente est parallèle à $y = mx$ car $y' = 2ax + b = m$.

135. Intersection de deux paraboles. — Construisons dans un même repère les courbes (P_1) et (P_2) :

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1) \quad \text{et} \quad y = a'x^2 + b'x + c' \qquad (2)$$

Éliminons y, nous obtenons l'équation aux abscisses des points d'intersection (n° 90) :

$$(a - a')x^2 + (b - b')x + c - c' = 0 \qquad (3)$$

1er cas ; $a = a'$. Cette équation est du 1er degré : un seul point d'intersection si $b \neq b'$. Pas d'intersection si en plus $b = b'$.

2e cas ; $a \neq a'$. L'équation (3) est du second degré et :

$$\Delta = (b - b')^2 - 4(a - a')(c - c').$$

a) $\Delta > 0$. L'équation (3) a deux racines distinctes et les courbes se coupent en deux points distincts A et B (fig. 54).

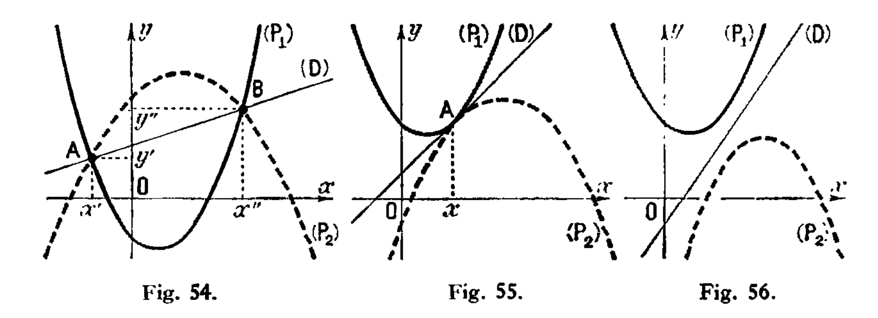


Fig. 54. Fig. 55. Fig. 56.

b) $\Delta = 0$. Les deux courbes se coupent en deux points confondus en A d'abscisse x_0. Or : $x_0 = -\frac{b - b'}{2(a - a')} \Longrightarrow 2ax_0 + b = 2a'x_0 + b'$. Les deux courbes ont même tangente en A et sont tangentes en ce point (fig. 55).

c) $\Delta < 0$. Les deux courbes n'ont aucun point commun (fig. 56).

Remarque. — Éliminons x^2 entre les équations (1) et (2) en multipliant (1) par $-a'$ et (2) par a :

$$(a - a')y = (ab' - a'b)x + ac' - a'c \qquad (4)$$

Cette équation est celle d'une droite (D), passant par tout point commun à (P_1) et (P_2), car toute solution du système (1) et (2) vérifie l'équation (4). C'est l'équation de la droite AB si $\Delta > 0$ (fig. 54) ou de la tangente commune en A si $\Delta = 0$ (fig. 55). Elle est extérieure aux deux courbes si $\Delta < 0$ (fig. 56).

136. Détermination d'une parabole.

1° ***Parabole passant par trois points donnés.***

EXEMPLE. — Soient les points : $A(-1; 0)$, $B(1; 3)$ et $C(3; 2)$ (fig. 57). Pour que la parabole : $y = ax^2 + bx + c$ passe par ces trois points, il faut et il suffit que :

$$a - b + c = 0; \; a + b + c = 3$$

et
$$9a + 3b + c = 2.$$

Ces trois relations donnent :

$$a = -\frac{1}{2}, \; b = \frac{3}{2} \text{ et } c = 2.$$

La parabole cherchée a pour équation :

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 2.$$

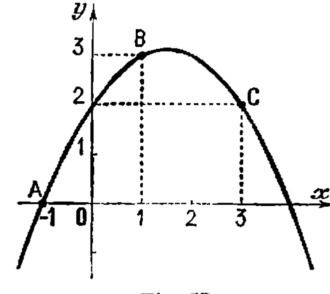


Fig. 57.

Si l'on connaît les abscisses α et β des intersections de (P) avec l'axe Ox, on pourra prendre son équation sous la forme :

$$\boxed{y = a(x - \alpha)(x - \beta)}$$

2° ***Paraboles ayant un sommet donné.*** — Soit $S(\alpha, \beta)$ le sommet de la parabole.

Il faut que : $-\dfrac{b}{2a} = \alpha$ et $a\alpha^2 + b\alpha + c = \beta$ ou $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = \beta$.

Soit : $b = -2a\alpha$ et $c = \beta + a\alpha^2$ et l'équation s'écrit :

$$y = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta. \text{ Soit: } \boxed{y = a(x - \alpha)^2 + \beta}$$

ce qui se vérifie par la formule :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

3° ***Paraboles tangentes à une droite donnée.*** — Soit à déterminer les paraboles tangentes à la droite (D) d'équation $y = mx + p$ au point A d'abscisse $x = \alpha$.

La tangente au point $x = \alpha$ à la parabole $y = ax^2 + bx + c$ s'écrit (n° 133) :

$$y = (2a\alpha + b)x + c - a\alpha^2$$

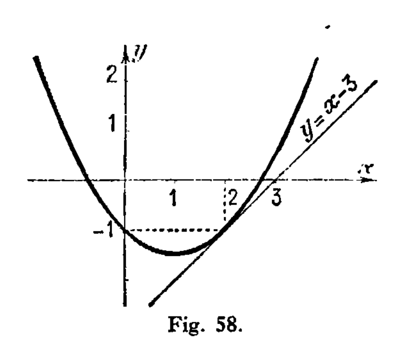


Fig. 58.

Pour que cette tangente soit la droite $y = mx + p$ il faut et il suffit que :

$$2a\alpha + b = m; \qquad c - a\alpha^2 = p$$

soit : $b = m - 2a\alpha$; $c = p + a\alpha^2$.

Les paraboles cherchées ont donc pour équation :

$$y = ax^2 + (m - 2a\alpha)x + p + a\alpha^2$$

$$\boxed{y = a(x - \alpha)^2 + mx + p} \qquad (1)$$

On vérifie d'ailleurs qu'une telle parabole coupe la droite $y = mx + p$ pour $a(x - \alpha)^2 = 0$, donc en deux points confondus d'abscisse $x = \alpha$.

EXEMPLES. — 1° La parabole $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + x - 3$ est tangente à la droite $y = x - 3$ au point d'abscisse $x = 2$ (fig. 58).

2° La parabole $y = ax^2 + bx + c$ est tangente à la droite $y = bx + c$ en son point de rencontre avec Oy.

137. Discussion graphique de l'équation : $ax^2 + bx + c = m$.

EXEMPLE. — *Étudier suivant les valeurs du paramètre* m *la position, par rapport aux nombres* -1 et $5/2$, *des racines de l'équation :*

$$x^2 - 2x - 4 + m = 0. \qquad (1)$$

L'équation (1) est l'équation aux abscisses des points d'intersection de la parabole fixe (Γ) : $y = -x^2 + 2x + 4$ et de la droite variable $\Delta : y = m$.

Marquons (fig. 59) sur (Γ) les points A $(-1, +1)$ et B $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right)$. L'abscisse x du point d'intersection M de la parabole Γ et de la droite Δ est telle que

$$x < -1; \quad -1 < x < \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad x < \frac{5}{2}$$

suivant que M appartient à la branche Au, à l'arc AB ou à la branche Bv de la parabole Γ. Le graphique permet d'écrire immédiatement suivant les valeurs de m les résultats suivants :

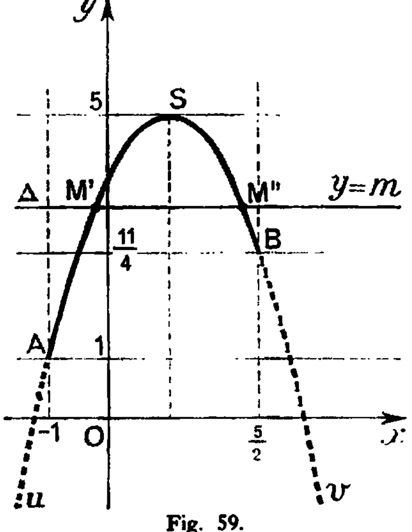


Fig. 59.

m	CONCLUSIONS
$+\infty$	
	Pas de racines réelles
5	⟶ $x' = x'' = 1$
	$-1 < x' < x'' < \frac{5}{2}$
$\frac{11}{4}$	⟶ $-1 < x' < x'' = \frac{5}{2}$
	$-1 < x' < \frac{5}{2} < x''$
1	⟶ $x' = -1 < \frac{5}{2} < x''$
	$x' < -1 < \frac{5}{2} < v''$
$-\infty$	

REMARQUE. — Cette étude graphique de la position des racines d'une équation du 2e degré par rapport à deux nombres donnés est plus rapide que la discussion algébrique (n° 53). Elle se généralise pour toute équation de la forme $f(x) = m$ en utilisant la courbe $y = f(x)$.

EXERCICES

507. Déterminer le coefficient a de façon que la parabole : $y = ax^2$ passe par le point A $(-3; +2{,}25)$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection avec la droite $x + 2y = 4$.

508. On considère un repère orthonormé xOy et le point A de Oy tel que $\overline{OA} = p$. Déterminer le lieu des points M du plan tels que en désignant par H la projection de M sur Ox on ait la relation :
$\overline{MA}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{OA}^2$.

509. On considère la courbe : $y = \dfrac{x^2}{2}$ et la droite variable $y = x + m$.

1° Pour quelles valeurs de m la droite coupe-r-elle la courbe en deux points A et B ? Calculer les coordonnées de ces points pour $m = \dfrac{3}{2}$.

2° Trouver en fonction de m les coordonnées du milieu M de AB. Lieu du point M et équation de la tangente à la courbe à l'extrémité de ce lieu.

510. On considère en orthonormées la courbe $(\Gamma) : y = x^2$ et on la coupe par une droite variable (Δ) $y = 2x + m$.

1° Déterminer suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de la courbe et de la droite. Construire la droite (Δ) tangente à (Γ).

2° Trouver les valeurs de m pour que l'un des points d'intersection ait pour abscisse -1 ou $+2$. Construire les droites (Δ) correspondantes et calculer les coordonnées de leur deuxième point d'intersection avec la courbe.

3° Utiliser le graphique ainsi obtenu pour déterminer suivant les valeurs de m l'existence et la position des racines de l'équation : $x^2 - 2x - m = 0$ par rapport à -1 et $+2$.

511. On construit dans un repère orthonormé la courbe (Γ) : $y = \dfrac{x^2}{4}$ et on considère la droite variable (Δ) : $y = m\left(x - \dfrac{3}{2}\right) - 1$.

1° Montrer que (Δ) passe par un point fixe S. Calculer ses coordonnées.

2° Étudier suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (Δ) et de (Γ). Équations des tangentes en A et B issues du point S. Déterminer l'angle ASB.

3° La droite AB coupe Oy en un point F. Établir l'équation de SF et montrer que AB et SF sont perpendiculaires.

512. On considère en orthonormées la courbe $y = x^2$ et la droite $y = mx + p$.

1° Déterminer m et p pour que la droite soit tangente à la courbe au point d'abscisse $x = \alpha$. Calculer l'ordonnée du point de contact M.

2° On désigne par A et B les intersections de la tangente en M avec Ox et Oy puis par H et K les projections de M sur Ox et Oy. Montrer que A est le milieu de OH et de BM et O celui de BK.

3° Montrer que la médiatrice de BM passe par un point fixe F de Oy. Comparer la différence MF − MH à la longueur OF.

513. Construire la courbe : $y = \dfrac{x^2}{2}$. Par le point A de $x'x$ d'abscisse $+1$ on trace une droite (D) variable de coefficient directeur m.

1° Étudier suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de la droite et de la courbe.

2° Déterminer l'équation de la tangente issue de A différente de Ox et les coordonnées de son point de contact T.

3° On suppose que (D) coupe la courbe en deux points M′ et M″. Déterminer en fonction de m le produit $\overline{AM'}.\overline{AM''}$.

514. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = -\frac{1}{2}x^2$ sur la droite $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$. Construire la courbe représentative (C) dans le système d'axes rectangulaires xOy.

2° On considère la droite (D) d'équation $y = x + p$. Former l'équation du second degré dont les racines x' et x'' soient les abscisses des points M′ et M″ communs à (C) et à (D). En déduire le lieu géométrique des milieux des cordes M′M″ de (C) quand p varie; limiter avec soin la portion de la courbe trouvée qui convient.

3° Qu'arrive-t-il si l'on fait $p = \frac{1}{2}$ dans l'équation de (D)? Préciser alors la position de (D) par rapport à (C).

515. Soient Ox et Oy deux axes de coordonnées rectangulaires. On marque sur l'axe Ox le point A d'abscisse a positive donnée, et l'on trace la courbe (C) représentative de la fonction $y = \frac{x^2}{2a}$.

1° On coupe la courbe (C) par la droite (D) représentative de la fonction : $y = m(x - a)$. Former l'équation du second degré ayant pour racines les abscisses x' et x'' des points d'intersection.

Déterminer m, différent de zéro, de manière que l'une de ces abscisses soit double de l'autre. Calculer alors les coordonnées des points d'intersection, et dessiner sur une même figure la courbe (C) et la droite (D) ainsi déterminée.

2° Le paramètre m redevenant arbitraire, expliquer comment varie la droite (D) quand m varie. Calculer les coordonnées du point de contact de la courbe (C) avec la droite (D), différente de Ox, qui lui est tangente.

3° Discuter, suivant les valeurs de m, l'existence des points d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D) et interpréter géométriquement cette discussion.

— Étudier et représenter graphiquement les fonctions :

516. $y = 2x^2 - 3x + 1$. **517.** $y = -2x^2 + x + 3$. **518.** $y = 4 - (x - 2)^2$

519. $y = x^2 - 5x - 14$. **520.** $y = -\frac{x^2}{2} + x - 4$. **521.** $y = \frac{x^2}{2} - x - 6$.

— Résoudre graphiquement les systèmes suivants, et vérifier par le calcul :

522. $\begin{cases} 4x - y - \frac{1}{2} = 0 \\ (x + 3)(x - 5) + 2y = 0. \end{cases}$

523. $\begin{cases} x^2 + 2(x + y) + 5 = 0 \\ 3x + 2y + 11 = 0. \end{cases}$

524. $\begin{cases} 3(x + y) + 4 = 0 \\ x^2 - 2x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$

525. $\begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ 3x^2 - 2(x - y) + 8 = 0. \end{cases}$

526. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x + 6. \end{cases}$

527. $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - 3 \\ y = -\frac{x^2}{2} + x + 3. \end{cases}$

528. $\begin{cases} y = -\frac{x^2}{2} + x + 2 \\ y = x^2 - \frac{x}{2} - 1. \end{cases}$

529. $\begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 5 \\ 9y = -2x^2 + 16x - 5. \end{cases}$

530. Montrer que la parabole : $y = \frac{x^2}{2} - mx + 1$ passe par un point fixe. Déterminer les coordonnées X et Y de son sommet S et trouver le lieu de S lorsque m varie.

531. Déterminer la parabole : $y = ax^2 + bx + c$:

1° Passant par les points A(− 2; 2), B(0; − 2) et C(3; − 0,5).

2° Passant par le point A$(-1; 1)$ et admettant pour sommet S$(1; 3)$.

3° Tangente à la droite : $y = x - \frac{1}{2}$ et à la droite $y = -2x + 7$ au point A$(4; -1)$.

532. On considère la droite variable (Δ) : $y = 2mx - (m^2 + 1)$.

1° Construire cette droite pour $m = -1$ et calculer m pour que Δ passe par le point A $\left(1; -\frac{9}{4}\right)$.

2° Déterminer le lieu (C) des points M du plan par où passe une droite Δ et une seule, et montrer qu'en chacun de ces points la droite Δ correspondante est tangente à (C).

533. On considère dans un repère orthonormé le point A$(x = 2; y = 4)$ et la droite (D) définie par la relation $y = +5$. Soit un point M de coordonnées x et y et MB la perpendiculaire en B à (D).

1° Calculer $\overline{MA}^2$ et $\overline{MB}^2$ en fonction de x et de y.

2° En déduire la relation entre x et y pour que M soit équidistant de A et de la droite (D). Quelle courbe décrit le point M ? Construire cette courbe.

534. Dans un repère orthonormé un point variable P décrit la droite fixe (D) d'équation : $y + 1 = 0$. La perpendiculaire en P à (D) et la perpendiculaire en O à OP se coupent en M.

1° Trouver la relation qui existe entre les coordonnées x et y du point M.

2° Construire la courbe décrite par le point M lorsque P décrit la droite (D).

535. Soient A$(+1; +4)$ et B$(+1; +3)$, deux points fixes du plan rapporté au repère orthonormé xOy. Un point variable M décrit la droite (D) d'équation $y = 4$. La perpendiculaire en M à (D) et la perpendiculaire menée par A à BM se coupent en S.

1° Établir que $\overline{AM}^2 = \overline{AB}.\overline{MS}$. En déduire une relation entre les coordonnées x et y du point S.

2° Construire la courbe décrite par S lorsque le point M parcourt (D).

536. 1° Étudier et représenter graphiquement en orthonormées la fonction : $y = -\frac{x^2}{4} + x + 1$.

2° Montrer que tout point M(x, y) de la courbe précédente est équidistant du point A$(x = 2, y = 1)$ et de la droite : $y = 3$.

3° Par le point B$(x = -1, y = 0)$ on mène la droite de coefficient directeur m. Étudier suivant la valeur de m le nombre des points de rencontre de cette droite avec la courbe et le signe des abscisses de ces points.

537. On considère le trinôme : $y = ax^2 + bx + c$.

1° Construire dans un repère orthonormé xOy la courbe figurative pour $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$.

2° Calculer les abscisses des points de rencontre de cette courbe avec les bissectrices des axes.

3° Calculer les abscisses des points de rencontre de cette courbe avec la droite passant par l'origine et faisant un angle de 30° avec l'axe Ox.

538. 1° Étudier les variations de la fonction $y = \frac{1}{4}(3 - x)(x + 5)$ et construire la courbe représentative (C). Soit A le point où (C) coupe Oy.

2° Comment varie la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + h$ avec h ? Discuter suivant les valeurs de h le nombre de points d'intersection de (C) et (D). Soient M et M′ les points d'intersection de (C) et (D) lorsqu'ils existent ; déterminer le lieu du milieu P de MM′ quand (D) varie.

3° Montrer que, lorsque m varie, la droite (Δ) d'équation $y = mx + 5$ passe par un point fixe B. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (C) et (Δ). En déduire l'existence

de deux tangentes issues de B. Montrer qu'elles sont perpendiculaires. Déterminer les coordonnées des points de contact T_1 et T_2 et vérifier que le milieu I de T_1 et T_2 fait partie du lieu trouvé à la question précédente et est symétrique de B par rapport à A. Équation de la droite qui passe par les points de contact T_1 et T_2.

539. Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe (C) représentant la fonction : $y = x^2$.

Soient A et B deux points de cette courbe se projetant en a et b sur Ox et soient α et β leurs abscisses respectives.

1° Quelle relation doit-il exister entre α et β pour que le milieu de AB soit sur une parallèle à Oy d'abscisse k donnée ? Calculer la pente de la droite AB en fonction de k et en déduire le lieu des milieux des cordes de (C) parallèles à une direction donnée.

2° Calculer les coordonnées (X, Y) du milieu M de AB en fonction de α et de β. En déduire les expressions de α et β en fonction de X et de la valeur h supposée connue de ab. Former ensuite la relation liant X et Y indépendamment de α et β quand A et B se déplacent sur (C) de façon que $ab = h =$ constante et en déduire le lieu de M dans les mêmes conditions.

3° Quelle relation doit-il exister entre α et β pour que l'angle AOB soit droit ? Calculer en ce cas l'ordonnée du point P où AB coupe Oy et en déduire que P est fixe quand l'angle droit AOB pivote autour de O.

540. On considère la fonction $y = x^2 + 2\,mx + p$.

1° Déterminer p et m de telle sorte que la courbe représentative coupe l'axe Oy au point A d'ordonnée 1 et soit tangente à la droite d'équation $y = 2\,x - 3$. On trouvera deux solutions.

2° Construire les deux courbes trouvées à la question 1°. On déterminera, en particulier, les points de contact de ces courbes avec la droite donnée et le coefficient directeur des tangentes à ces courbes à leur point d'intersection A.

541. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = -\dfrac{x^2}{4} + x + 3$.

Construire la courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé.

2° Calculer les coefficients directeurs des tangentes à cette courbe aux points B et C d'abscisses respectives 0 et 6. Écrire les équations de ces tangentes. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection A.

3° Calculer les coordonnées du milieu M de BC et du milieu P de MA. Montrer que P est sur la courbe (Γ).

4° Montrer que la tangente en P à la courbe (Γ) est parallèle à BC.

542. On considère la courbe C, graphe de la fonction $y = x^2 - 3\,x + 4$ et la courbe C', graphe de la fonction $y = \dfrac{x^2}{2} - x + 2$.

1° Construire C et C' dans un même repère rectangulaire. Montrer que ces deux courbes ont un point commun et un seul et calculer les coordonnées de ce point, qu'on désigne par A.

2° Calculer les coefficients directeurs des tangentes en A à C et C' et vérifier que ces tangentes sont confondues. En désignant par T cette tangente commune, trouver la fonction dont la droite T représente les variations.

3° Par le point B de l'axe Oy d'ordonnée b on mène la droite D parallèle à la tangente T. Quelle est la fonction dont D représente les variations ? Former l'équation donnant les abscisses des points communs à C et D ou à C' et D. Quelle condition doit vérifier b pour que D coupe respectivement C et C' en deux points distincts ?

4° Montrer que les segments découpés par C et C' sur D ont même milieu I. Quel est le lieu du point I lorsque B se déplace sur l'axe Oy ?

543. 1° Déterminer les coefficients a, b, c de façon que le trinôme du second degré : $ax^2 + bx + c$ prenne la valeur 18 pour $x = 2$, la valeur -12 pour $x = -3$ et la valeur 42 pour $x = 3$.

2° Étudier les variations de la fonction : $y = ax^2 + bx + c$, a, b, et c ayant les valeurs trouvées au paragraphe précédent, et construire la courbe représentative (Γ).

3° La droite (D) d'équation : $y = mx - 15$ coupe (Γ) en A et B. Déterminer pour quelles valeurs de m les points A et B sont confondus.

4° Lieu du milieu P du segment AB lorsque m varie. Construire ce lieu.

544. Déterminer les coefficients a, b et c de façon que le trinôme du 2ᵉ degré $ax^2 + bx + c$ prenne la valeur numérique -1 pour $x = 0$ et pour $x = 1$, et qu'il prenne la valeur numérique 1 pour $x = -1$.

2° Étudier les variations de la fonction : $y = ax^2 + bx + c$, a, b et c ayant les valeurs trouvées précédemment.

3° Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de cette courbe avec la droite qui a pour équation : $y = mx - 1$?

4° Pour quelle valeur de m cette droite est-elle tangente à la courbe ?

545. Étant données les fonctions $\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = -x^2 - 2x + 3. \end{cases}$

1° Étudier et représenter graphiquement leurs variations. Montrer que ces deux courbes se coupent en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées ; en déduire que le point A se trouve sur Ox.

2° Montrer que le graphe de la fonction : $y = (1 - m)x^2 - mx + 2m - 1$ passe par les points A et B quel que soit m. Trouver les abscisses des points d'intersection A et M de cette courbe avec l'axe des x.

3° Étudier et représenter graphiquement les variations de l'abscisse du point M lorsque m varie.

4° Pour quelle valeur de m la courbe : $y = (1 - m)x^2 - mx + 2m - 1$ et la droite $y = 2x - 2$ sont-elles tangentes ? Calculer les coordonnées du point de contact.

ÉTUDE DE LA FONCTION : $y = \frac{a}{x}$

138. Théorème. — ***La fonction*** $y = \frac{1}{x}$ ***est définie et continue sur les deux intervalles*** $]-\infty, 0[$ ***et*** $]0, +\infty[$. ***Elle est décroissante dans chacun de ces intervalles.***

On peut, en effet, calculer y pour toutes les valeurs de x, sauf cependant pour $x = 0$. La fonction n'est pas définie pour cette valeur de x. Comme le produit xy est égal à $+1$, x et y sont toujours de même signe.

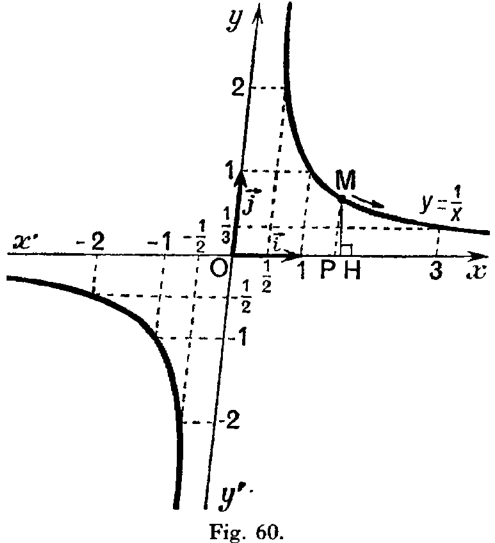


Fig. 60.

A deux valeurs de x opposées, α et $-\alpha$, correspondent deux valeurs de y opposées $\frac{1}{\alpha}$ et $-\frac{1}{\alpha}$. La fonction $y = \frac{1}{x}$ est une fonction impaire.

Sa dérivée $y' = -\frac{1}{x^2}$ étant négative pour $x \neq 0$, la fonction $y = \frac{1}{x}$ est donc décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Lorsque $x \to \pm\infty$, $y \to 0$ car pour obtenir $|y| < \varepsilon$ il suffit de prendre $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$. De même lorsque x tend vers 0, y tend vers $\pm\infty$. Pour obtenir $|y| > A$, il suffit de prendre $|x| < \frac{1}{A}$. On obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

Lorsque x ***croît de*** $-\infty$ ***à*** 0, ***puis de*** 0 ***à*** $+\infty$, y ***décroît de*** 0 ***à*** $-\infty$, ***puis de*** $+\infty$ ***à*** 0.

Le double trait vertical, pour $x = 0$, indique que pour cette valeur de x la fonction n'est pas définie.

Le plan étant rapporté à un repère cartésien quelconque xOy, on voit (fig. 60) que le graphe de la fonction $y = \frac{1}{x}$ se compose de deux branches distinctes situées dans les régions I (x et y positifs) et III (x et y négatifs).

Ces deux branches sont symétriques par rapport à l'origine O, car la fonction est impaire et admettent toutes deux pour asymptotes les axes $x'x$ et $y'y$ (nº 121). La courbe obtenue est appelée *hyperbole.*

139. Étude de la fonction : $y = \frac{a}{x}$. — La fonction $y = \frac{a}{x} = a \cdot \frac{1}{x}$ est une fonction impaire définie et continue pour toute valeur de x différente de 0.

Sa dérivée $y' = -\frac{a}{x^2}$ étant du signe de $-a$, on voit que :

La fonction $y = \frac{a}{x}$ ***est définie et continue sur les intervalles*** $]-\infty, 0[$ ***et*** $]0, +\infty[$. ***Dans chacun de ces intervalles elle est décroissante pour a positif, croissante pour a négatif.***

D'autre part lorsque $|x| \to \infty$, $y \to 0$ et lorsque $x \to 0$, $|y| \to \infty$. On obtient :

1er Cas : *a positif*

x	$-\infty$	0		$+\infty$
y'	$-$	‖	$-$	
y	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

2e Cas : *a négatif*

x	$-\infty$	0		$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$	
y	0 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

1º ***a* positif. — *Lorsque x croît de*** $-\infty$ ***à*** 0, ***puis de*** 0 ***à*** $+\infty$, ***y décroît de*** 0 ***à*** $-\infty$, ***puis de*** $+\infty$ ***à*** 0.

2º ***a* négatif. — *Lorsque x croît de*** $-\infty$ ***à*** 0, ***puis de*** 0 ***à*** $+\infty$, ***y croît de*** 0 ***à*** $+\infty$, ***puis de*** $-\infty$ ***à*** 0.

140. Représentation graphique. — Le plan étant rapporté à un repère cartésien quelconque xOy, la courbe $y = \frac{a}{x}$ se déduit de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ dans l'affinité d'axe Ox, de direction Oy et de rapport a. *Cette courbe est une hyperbole* située dans les régions (I) et (III) si a est positif (fig. 61), dans les régions (II) et (IV) si a est négatif (fig. 62). Elle est d'autant plus éloignée des axes que a est grand en valeur absolue.

REMARQUES. — 1º L'équation de la courbe s'écrit aussi : $xy = a$. Sous cette forme, on voit que x et y jouent des rôles identiques et on passe de l'hyperbole $xy = 1$ à l'hyperbole $xy = a$ par l'affinité d'axe Oy, de direction Ox et de rapport a.

2º Si le repère xOy est rectangulaire, *l'hyperbole $xy = a$ est dite équilatère.* Les hyperboles équilatères $xy = a$ et $xy = -a$ sont alors symétriques l'une l'autre par rapport à Ox ou par rapport à Oy.

3° ***L'hyperbole*** $xy = a$ ***admet pour asymptotes les droites*** Ox ***et*** Oy. — Cela résulte du n° 121 pour la courbe $y = \frac{a}{x}$. On vérifie (fig. 62) que lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la distance MH du point $M(x, y)$ à Ox, au plus égale à $MP = \left|\frac{a}{x}\right|$, tend vers 0. En intervertissant le rôle des axes Ox et Oy, on voit de même que Oy est une asymptote de la courbe.

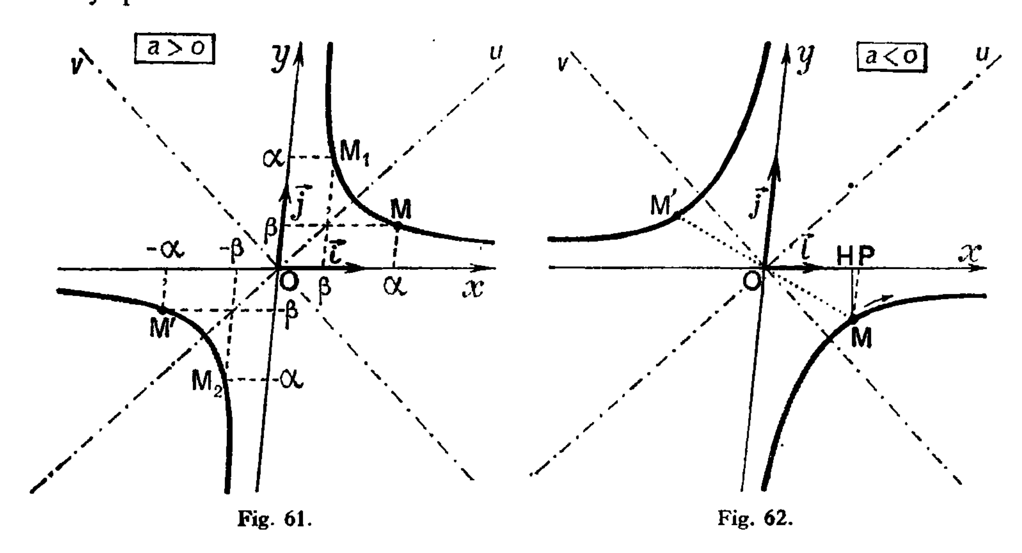


Fig. 61. Fig. 62.

141. Symétries de l'hyperbole $xy = a$.

1° ***L'origine*** O ***est un centre de symétrie de la courbe.*** — Cela résulte du fait que la fonction $y = \frac{a}{x}$ est une fonction impaire (n° 86). Si le point $M\left(x = \alpha, y = \beta = \frac{a}{\alpha}\right)$ est un point de la courbe (fig. 61), il en est de même du point $M'(x = -\alpha, y = -\beta)$.

2° ***Les bissectrices des angles formés par les axes sont des axes de symétrie.***

Supposons d'abord (fig. 61) que le repère xOy soit normé, c'est-à-dire que les vecteurs unitaires des axes $\vec{i}$ et $\vec{j}$ aient même module. Ils s'échangent dans la symétrie par rapport à la bissectrice Ou des angles xOy et $x'Oy'$ (*première bissectrice*). Cette symétrie transforme le vecteur $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ en un vecteur $\overrightarrow{OM_1} = \alpha\vec{j} + \beta\vec{i}$. Or le point $M_1\left(x = \beta, y = \alpha = \frac{a}{\beta}\right)$ est un point de la courbe.

On voit de même que la symétrie par rapport à la bissectrice Ov des angles $x'Oy$ et xOy' (*deuxième bissectrice*) transforme $\vec{i}$ en $-\vec{j}$ et $\vec{j}$ en $-\vec{i}$. Elle transforme le vecteur $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ en $\overrightarrow{OM_2} = -(\alpha\vec{j} + \beta\vec{i})$ opposé à $\overrightarrow{OM_1}$. Le point $M_2(-\beta, -\alpha)$ appartient à la courbe qui admet les deux bissectrices comme axes de symétrie.

Ces propriétés se conservent si on remplace le vecteur $\vec{j}$ par $\vec{J} = 3\vec{j}$ par exemple, car cela revient à multiplier par 3 les ordonnées de chacun des points de la courbe initiale.

Rapportée à l'ancien repère la nouvelle courbe a pour équation : $y = \frac{3a}{x}$. Elle est de la même forme que $y = \frac{a}{x}$ et admet les mêmes éléments de symétrie.

142. Résumé. — ***La courbe $y = \frac{a}{x}$ est une hyperbole admettant $x'x$ et $y'y$ pour asymptotes, l'origine O pour centre de symétrie et les bissectrices des angles formés par les asymptotes pour axes de symétrie.***

La forme de l'hyperbole $xy = a$ dépend de la valeur de l'*angle des asymptotes* à l'intérieur duquel se trouve une des branches de la courbe.

REMARQUES. — 1° Considérons (fig. 63), construites dans un même repère xOy, les deux hyperboles $xy = a$ et $xy = k^2a$. Si le point $M(\alpha, \beta)$ appartient à la première, son homologue $M'(k\alpha, k\beta)$ dans l'homothétie (O, k) appartient à la seconde et inversement. Les deux courbes sont homologues dans cette homothétie. Donc :

Deux hyperboles qui ont même angle des asymptotes sont semblables.

Fig. 63.

2° L'hyperbole $xy = a$ partage le plan en trois régions. Celle qui contient le centre et les asymptotes constitue l'*extérieur de l'hyperbole.* Les deux autres, limitées chacune par une branche de la courbe, constituent l'*intérieur de l'hyperbole.*

143. Tangente et normale à l'hyperbole $xy = a$.

1° La tangente au point $M(x, y)$ à l'hyperbole $y = \frac{a}{x}$ a pour coefficient directeur $y' = -\frac{a}{x^2}$, soit, compte tenu de l'équation de la courbe : $y' = -\frac{y}{x}$. Dans tout repère cartésien l'équation de cette tangente s'écrit donc (n° 115) :

$$Y - y = -\frac{y}{x}(X - x) \iff \boxed{\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 2} \qquad (1)$$

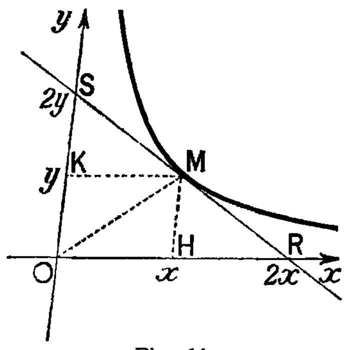



Fig. 64.

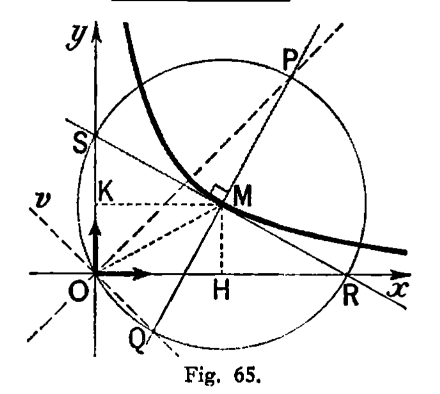


Fig. 65.

La tangente coupe les asymptotes en R $(2x; 0)$ et S $(0; 2y)$. Ces points sont les symétriques de O par rapport aux projections H et K du point M sur les asymptotes et M est le milieu de RS (fig. 64).

2° Dans un repère orthonormé l'hyperbole est équilatère (fig. 65) et le point M est le centre du cercle ORS. Ce cercle recoupe les axes de l'hyperbole, bissectrices de l'angle xOy, aux extrémités P et Q du diamètre perpendiculaire à RS. La droite PQ est donc la normale en M et son équation s'écrit puisque $y' = -\frac{y}{x}$ (n° 116) :

$$X - x - \frac{y}{x}(Y - y) = 0 \iff \boxed{Xx - Yy = x^2 - y^2.}$$

Donc P est le point $X = Y = x + y$ et Q le point $X = -Y = x - y$.

144. Sécantes à une hyperbole. — Les points d'intersection de l'hyperbole : $xy = a$ et de la droite D : $y = mx + p$ ont pour abscisses les racines de l'équation :

$$mx^2 + px - a = 0.$$

La droite D est tangente à la courbe pour : $p^2 + 4\,am = 0$, sécante en M′ et M″ pour $p^2 + 4\,am > 0$ (fig. 66).

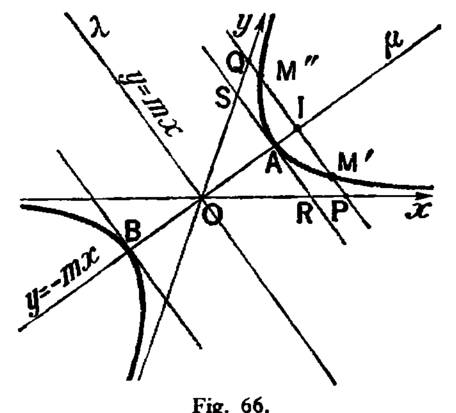


Fig. 66.

1° Le milieu I de M′M″ a pour coordonnées $x_I = \frac{x' + x''}{2} = -\frac{p}{2m}$ et $y_I = mx_I + p = \frac{p}{2}$.

Or, puisque la droite D coupe les asymptotes en $P\left(-\frac{p}{m}, 0\right)$ et $Q(0, p)$ on voit que I est aussi le milieu de PQ et que $\overline{PM'} = \overline{M''Q}$. On en déduit une construction (dite de la bande de papier) d'un point quelconque M″ de la courbe, connaissant les asymptotes et un point M′.

2° D'autre part $y_I = -mx_I$. Si la droite D varie en restant parallèle à la direction fixe $y = mx$, le lieu de I est la droite $y = -mx$, appelée *diamètre conjugué de la direction* $y = mx$. Comme inversement $y = mx$ est le diamètre de la direction $y = -mx$, on voit que deux diamètres conjugués de l'hyperbole ont des coefficients directeurs opposés et que l'un d'eux passe par les points de contact A et B des tangentes parallèles à l'autre.

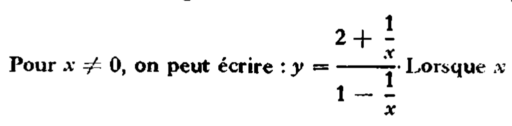
FONCTION HOMOGRAPHIQUE : $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

145. Étude directe de la fonction : $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$.

La fraction rationnelle $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ est définie pour toute valeur de x autre que la valeur $x = 1$ qui annule le dénominateur (pôle de la fraction rationnelle). Elle est donc définie et continue sur les intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.

Elle admet pour dérivée : $y' = \frac{2(x - 1) - (2x + 1)}{(x - 1)^2} \implies y' = -\frac{3}{(x - 1)^2}$

Cette dérivée étant négative sur chacun des intervalles précédents, la fonction est donc décroissante.



Pour $x \neq 0$, on peut écrire : $y = \dfrac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$. Lorsque x devient infini on voit que y tend vers $+ 2$. Comme $y - 2 = \dfrac{3}{x - 1} \Longrightarrow y = 2 + \dfrac{3}{x - 1}$, la fonction tend vers $+ \infty$ lorsque x tend vers $+ 1$ par valeurs supérieures, vers $- \infty$ lorsque x tend vers $+ 1$ par valeurs inférieures. D'où le tableau :

x	$- \infty$		1		$+ \infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	$\searrow - \infty$	‖	$+ \infty \searrow$	2

Lorsque x varie de $- \infty$ à $+ 1$, puis de $+ 1$ à $+ \infty$, la fonction décroît de $+ 2$ à $- \infty$, puis de $+ \infty$ à $+ 2$.

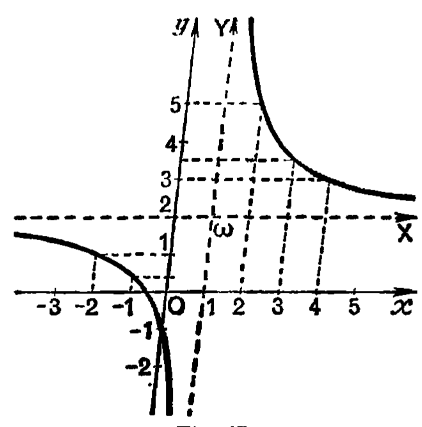


Fig. 67.

Graphe. — Dans un plan rapporté au repère cartésien quelconque xOy (fig. 67), la courbe représentative se compose de deux branches admettant toutes deux pour asymptotes les droites $y = 2$ et $x = 1$ (n° 121).

Soit $\omega\ (+ 1\,;\ + 2)$, le point de rencontre de ces asymptotes. Prenons comme nouveau repère le repère $X\omega Y$ se déduisant de xOy dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$. Les formules de changement d'axes (n° 91) donnent : $x = 1 + X$ et $y = 2 + Y$.

L'équation de la courbe : $y - 2 = \dfrac{3}{x - 1}$ devient : $Y = \dfrac{3}{X}$. Donc (n° 140) :

La courbe $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$ est une hyperbole admettant pour asymptotes les droites $x = 1$ et $y = 2$.

Elle admet le point $\omega\ (1\,;\ 2)$ pour centre de symétrie et pour axes de symétrie les bissectrices des angles de ses asymptotes (n° 142). Elle coupe l'axe Ox au point $x = - \dfrac{1}{2}$, l'axe Oy au point : $y = -1$.

146. Étude directe de la fonction : $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$.

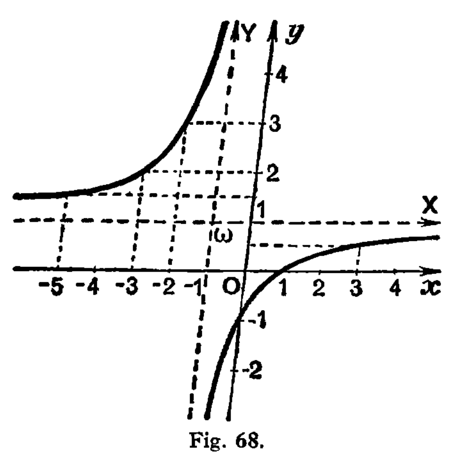


Fig. 68.

Cette fonction est définie sauf pour la valeur $x = - 1$ qui annule son dénominateur. Elle est donc définie et continue sur chacun des intervalles

$$]- \infty\,;\ - 1[\ \text{et}\ ]- 1\,;\ + \infty[$$

Elle admet pour dérivée :

$$y' = \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(x + 1)^2} \Longrightarrow y' = \frac{2}{(x + 1)^2}$$

Cette dérivée étant positive pour $x \neq - 1$, la fonction est donc croissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

Pour $x \neq 0$, on peut écrire $y = \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$. Lorsque x tend vers $\pm \infty$, on voit que y tend vers $+ 1$.

Comme : $y - 1 = -\frac{2}{x+1} \Longrightarrow y = 1 - \frac{2}{x+1}$, on voit que y tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ suivant que x tend vers -1 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures. D'où le tableau :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$
y	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

Lorsque x croît de $-\infty$ à -1, puis de -1 à ∞, y croît de $+1$ à $+\infty$, puis de $-\infty$ à $+1$.

GRAPHE. — Rapportée au repère cartésien xOy, la courbe représentative de la fonction $y = \frac{x-1}{x+1}$ (fig. 68) se compose de deux branches admettant toutes deux pour asymptotes les droites $x = -1$ et $y = +1$ (nº 121).

Soit $\omega\,(-1\,;+1)$ le point de rencontre de ces asymptotes et $X\omega Y$ le repère cartésien qui se déduit de xOy dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$. Les formules de changement de repère : $x = -1 + X$ et $y = 1 + Y$ montrent que :

$$y - 1 = -\frac{2}{x+1} \Longleftrightarrow Y = -\frac{2}{X}$$

La courbe $y = \frac{x-1}{x+1}$ est donc une hyperbole admettant pour asymptotes les droites $x = -1$ et $y = 1$.

Elle admet pour centre de symétrie le point $\omega\,(-1\,;+1)$ et pour axes de symétrie les bissectrices des angles de ses asymptotes (nº 142). Elle coupe l'axe Ox au point $x = 1$, l'axe Oy au point $y = -1$.

147. Cas général : $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Cette fonction est le quotient de deux binômes du 1er degré $ax + b$ et $cx + d$. Nous supposerons donc $c \neq 0$ sinon y se réduirait au binôme $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$.

La fonction y peut se calculer pour toutes les valeurs de x autres que la valeur $x = -\frac{d}{c}$ qui annule le dénominateur (pôle de la fonction). Cette fonction est donc définie sur chacun des intervalles : $]-\infty\,; -\frac{d}{c}[$ et $]-\frac{d}{c}\,; +\infty[$.

Sa dérivée s'écrit :

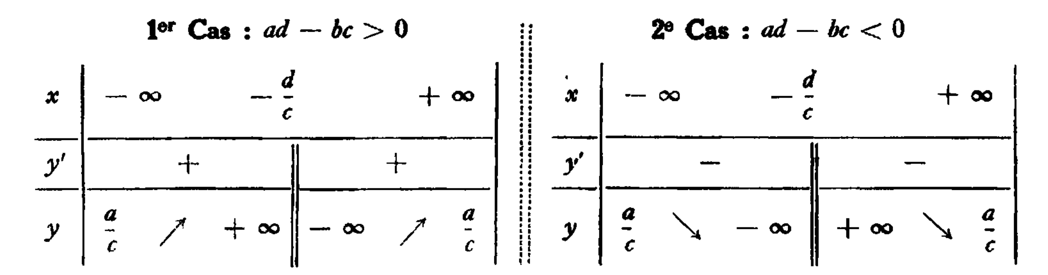
$$y' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}.$$

Dans chacun des intervalles, où la fonction est définie, sa dérivée est donc du signe de l'expression $ad - bc$. Nous supposerons cette expression différente de zéro car :

$$ad - bc = 0 \Longrightarrow b = \frac{ad}{c} \Longrightarrow y = \frac{ax + \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a(cx+d)}{c(cx+d)} \Longrightarrow y = \frac{a}{c}.$$

Lorsque x tend vers $-\frac{d}{c}$ le dénominateur s'annule et le numérateur tend vers $-\frac{ad}{c} + b = -\frac{ad-bc}{c} \neq 0$. Par suite y devient infini (nº 82).

Pour $x \neq 0$, on peut écrire : $y = \dfrac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}}$. Lorsque x tend vers $\pm\infty$, les rapports $\frac{b}{x}$ et $\frac{d}{x}$ tendent vers 0 et y tend vers $\frac{a}{c}$ (nº 82). On peut donc établir les tableaux de variation :



1er Cas : $ad - bc > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$\frac{a}{c}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{a}{c}$

2e Cas : $ad - bc < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$\frac{a}{c}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{a}{c}$

Dans chacun des intervalles où elle est définie la fonction $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ***est croissante lorsque*** $ad - bc$ ***est positif, décroissante lorsque*** $ad - bc$ ***est négatif.***

Rappelons que si $ad - bc = 0$ la fonction est, pour $x \neq -\frac{d}{c}$, constante et égale à $\frac{a}{c}$.

148. Représentation graphique. — Supposons tracée par points, dans un repère cartésien xOy, la courbe $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ qui (nº 121) admet pour asymptotes les droites $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ se coupant au point $\omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$. Or :

$$y - \frac{a}{c} = \frac{c(ax+b) - a(cx+d)}{c(cx+d)} = \frac{bc - ad}{c(cx+d)} \implies \boxed{y = \frac{a}{c} + \frac{k}{x + \frac{d}{c}}} \quad (1)$$

en posant $k = \dfrac{bc - ad}{c^2}$.

Soit $X\omega Y$, le repère se déduisant de xOy dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$. Les formules de changement de repère : $x = -\frac{d}{c} + X$ et $y = \frac{a}{c} + Y$, montrent, d'après la formule (1), que :

$$\boxed{Y = \frac{k}{X}} \quad (2)$$

La courbe $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ***est une hyperbole admettant pour asymptotes les droites*** $x = -\frac{d}{c}$ ***et*** $y = \frac{a}{c}$.

La courbe présente la disposition de la figure 69 ou de la figure 70 suivant que $ad - bc$ est positif ou négatif.

Le point $\omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe et les bissectrices des angles formés par les asymptotes en sont les axes de symétrie. L'hyperbole coupe Oy au point $y = \frac{b}{d}$ et Ox au point $x = -\frac{b}{a}$.

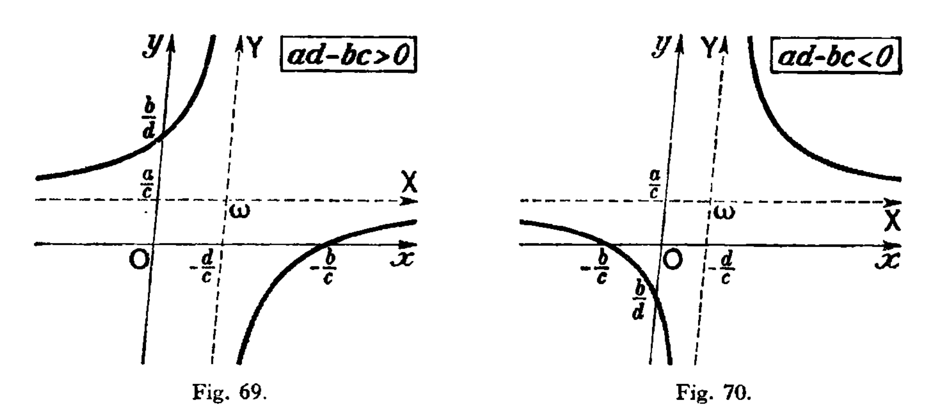


Fig. 69. Fig. 70.

L'équation (2) peut s'écrire $XY = k$. La courbe est d'autant plus éloignée de ses asymptotes que k est grand en valeur absolue. Si k tend vers 0, la courbe vient se confondre avec ses asymptotes.

La forme de la courbe dépend de l'angle des asymptotes, c'est dire de l'angle xOy si $k > 0$ de son supplément si $k < 0$. ***Si l'angle*** xOy ***est droit l'hyperbole est équilatère.***

149. Cas particuliers.

1° $a = 0 : y = \frac{b}{cx + d}$. L'axe $x'x$ est une des asymptotes (fig. 71).

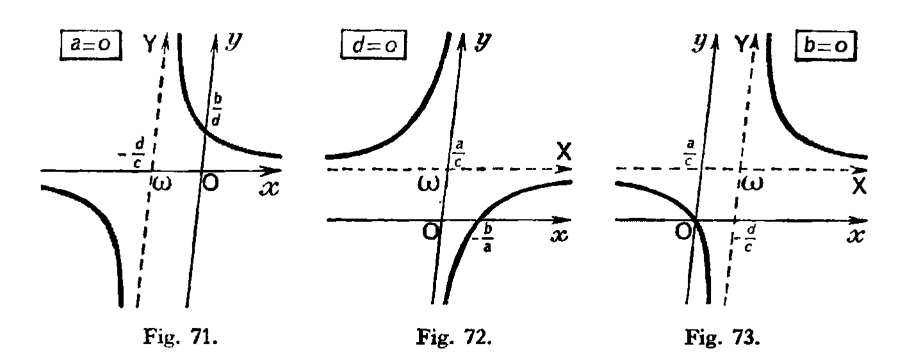


Fig. 71. Fig. 72. Fig. 73.

2° $d = 0 : y = \frac{ax + b}{cx}$. L'axe $y'y$ est une des asymptotes (fig. 72).

3° $b = 0 : y = \frac{ax}{cx + d}$. La courbe passe par l'origine (fig. 73).

APPLICATIONS

150. Relation homographique : $Axy + Bx + Cy + D = 0$ (1)

Cette relation est du 1er degré en x et du 1er degré en y. A chaque valeur de x correspond, en général, une valeur pour y et réciproquement.

1er CAS : $A = 0$. La relation (1) est du 1er degré en x et y et est représentée graphiquement par une droite (no 88).

2e CAS : $A \neq 0$. La relation (1) s'écrit : $y(Ax + C) + Bx + D = 0$.

Soit : $y = -\frac{Bx + D}{Ax + C}$.

Cette relation est de la forme $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ appelée fonction homographique et représentée par une hyperbole si $BC - AD \neq 0$.

Notons que la relation (1) peut alors s'écrire, en divisant par A, sous la forme :

$$xy - \beta x - \alpha y + \gamma = 0 \qquad (2)$$

ou

$$(x - \alpha)(y - \beta) = k \quad \text{en posant : } k = \alpha\beta - \gamma.$$

On en déduit : $y - \beta = \frac{k}{x - \alpha}$ ou $y = \beta + \frac{k}{x - \alpha}$, ce qui montre que l'hyperbole admet pour centre le point $\omega(\alpha, \beta)$ et pour asymptotes les droites $x = \alpha$ et $y = \beta$.

Pour $\alpha = \beta$, la relation (2) qui s'écrit : $xy - \alpha(x + y) + \gamma = 0$, est symétrique en x et y. Elle est dite *involutive*.

151. Intersection d'une hyperbole et d'une droite.

Supposons (fig. 74), tracées dans un même repère la droite (D) : $y = mx + p$ et l'hyperbole (H) : $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. L'équation aux abscisses des points d'intersection s'écrit (no 90) :

$ax + b = (cx + d)(mx + p)$ soit :

$$mcx^2 + (md + pc - a)x + pd - b = 0. \qquad (1)$$

Si $m \neq 0$, l'équation est du 2e degré et :

$\Delta = (md + pc - a)^2 - 4\,mc\,(pd - b)$:

1° $\Delta > 0$. La droite (D) coupe (H) en deux points distincts (sécante).

2° $\Delta = 0$. La droite (D) coupe (H) en deux points confondus (tangente).

3° $\Delta < 0$. La droite (D) est extérieure à (H).

Fig. 74.

Notons qu'une parallèle à une asymptote coupe une hyperbole en un point unique.

152. Intersection de deux hyperboles. — Dans un même repère, considérons les hyperboles (H_1) et (H_2) (fig. 75).

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (1) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{a'x + b'}{c'x + d'} \qquad (2)$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection s'écrit :

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a'x + b'}{c'x + d'} \qquad (3)$$

En général, nous sommes conduits à l'équation du second degré :

$$(ac' - a'c)\,x^2 + (ad' - a'd + bc' - b'c)\,x + bd' - b'd = 0 \qquad (4)$$

Les courbes (H_1) et (H_2) ont deux points, un seul point ou zéro point commun suivant que le discriminant de cette équation est positif, nul ou négatif.

Écrivons les équations (1) et (2) sous la forme entière :

$$cxy - ax + dy - b = 0; \quad c'xy - a'x + d'y - b' = 0.$$

Éliminons xy en multipliant la première par $-c'$ et la seconde par c. Nous obtenons :

$$(ac' - a'c)\;x + (cd' - c'd)\,y + bc' - b'c = 0 \qquad (5)$$

C'est l'équation d'une droite (D) passant par les points d'intersection A et B lorsqu'ils existent (ou l'équation de la tangente au point de contact lorsqu'ils sont confondus), car toute solution du système (1) (2) vérifie l'équation de cette droite.

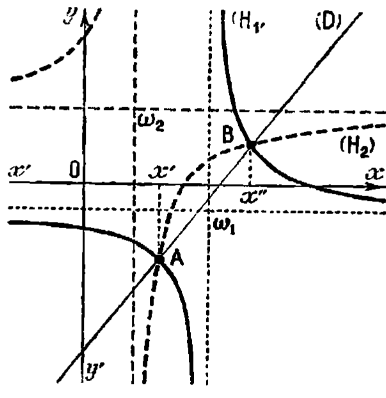


Fig. 75.

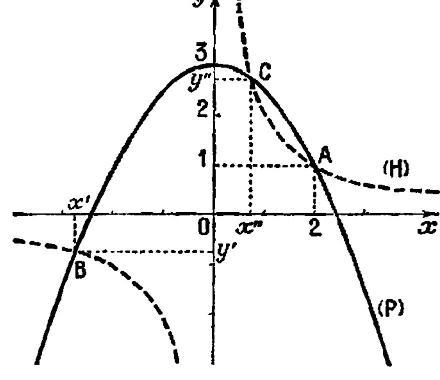


Fig. 76.

153. Parabole et hyperbole. — L'équation aux abscisses des points d'intersection de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ et de l'hyperbole $y = \dfrac{a'x + b'}{c'x + d'}$ s'écrit :

$$ax^2 + bx + c = \frac{a'x + b'}{c'x + d'},$$

et conduir à une équation du 3e degré de la forme : $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$.

Si on connaît une racine $x = \alpha$ de cette équation, on peut alors l'écrire sous la forme : $(x - \alpha)\,(A'x^2 + B'x + C') = 0$ et achever sa résolution.

154. Exemple : $y = -\dfrac{x^2}{2} + 3$ et $y = \dfrac{2}{x}$.

La construction des deux courbes (fig. 75) fait apparaître le point commun A (2; 1). On vérifie que l'équation aux abscisses :

$$\frac{2}{x} = -\frac{x^2}{2} + 3 \quad \text{ou} \quad x^3 - 6x + 4 = 0 \qquad (1)$$

admet 2 pour racine : $2^3 - 6.2 + 4 = 0$ (2)

et par différence entre (1) et (2) : $(x^3 - 2^3) - 6(x - 2) = 0$

Soit : $(x-2)[(x^2 + 2x + 4) - 6] = 0$ ou $(x-2)(x^2 + 2x - 2) = 0.$ (3)

D'ailleurs : $(x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$ se réduit à :

$$x^3 - 6x + 4 \text{ pour } a = 1,\ b = 2 \text{ et } c = -2.$$

L'équation $x^2 + 2x - 2 = 0$ admet pour racines $-1 \pm \sqrt{3}$, ce qui donne deux autres points communs B $(-1 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$ et C $(-1 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$.

155. Détermination d'une hyperbole. — L'équation : $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (1) dépend de quatre coefficients, mais comme on peut remplacer a, b, c et d par des nombres qui leur soient proportionnels, on peut toujours supposer (puisque $c \neq 0$) que $c = 1$. L'hyperbole dépend donc de trois paramètres. On peut en disposer pour imposer à la courbe des conditions fixées à l'avance.

Il est avantageux de prendre l'équation sous forme entière (n° 150) :

$$xy - \alpha y - \beta x + \gamma = 0 \quad (2) \quad \text{ou} \quad (x - \alpha)(y - \beta) = k \qquad (3)$$

Dans ce cas α et β sont les coordonnées du centre de la courbe, point de rencontre des asymptotes : $x = \alpha$ et $y = \beta$.

156. Exemple. — *Déterminer l'équation de l'hyperbole passant par les points* A $(+4; +1)$, B $(-2, +4)$ *et asymptote à la droite* $y = 3$.

En utilisant l'équation (2) on obtient les trois relations :

$$4 - \alpha - 4\beta + \gamma = 0; \quad -8 - 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 3.$$

Soit en résolvant : $\alpha = 2$, $\beta = 3$ et $\gamma = 10$.

L'hyperbole a pour équation :

$$xy - 2y - 3x + 10 = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{3x - 10}{x - 2}.$$

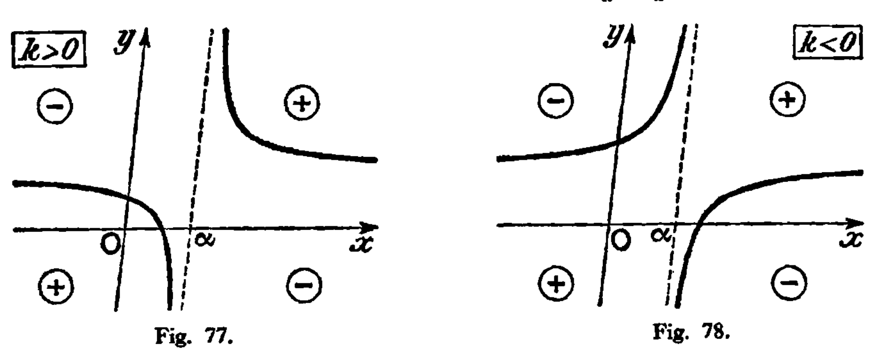


Fig. 77. Fig. 78.

157. Signe de l'expression : $f(x, y) = xy - \alpha y - \beta x + \gamma$.

Posons $\alpha\beta - \gamma = k$ et écrivons pour $x \neq \alpha$:

$$f(x, y) = (x - \alpha)(y - \beta) - k$$

soit

$$f(x, y) = (x - \alpha)\left[y - \left(\beta + \frac{k}{x - \alpha}\right)\right].$$

Le facteur $x - \alpha$ est positif pour $x > \alpha$, négatif pour $x < \alpha$. Dans chacune de ces régions le crochet est positif au-dessus de la courbe $f(x, y) = 0$, négatif au-dessous. On en déduit le signe de $f(x, y)$ pour $k > 0$ (fig. 77) et pour $k < 0$ (fig. 78). On vérifie que :

L'expression $f(x, y) = (x - \alpha)(y - \beta) - k$ est du signe de k à l'intérieur de l'hyperbole $f(x, y) = 0$, du signe opposé à l'extérieur.

On pourra ainsi résoudre graphiquement toute inéquation de la forme :

$$Axy + Bx + Cy + D > 0.$$

EXERCICES

— Résoudre graphiquement les systèmes suivants, et vérifier par le calcul :

546. $\begin{cases} 2x - 3y = 6. \\ xy = 12. \end{cases}$ **547.** $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ xy = 6. \end{cases}$

548. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ xy = 16. \end{cases}$ **549.** $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ xy = 3. \end{cases}$

550. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ xy = -30. \end{cases}$ **551.** $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ xy = -18. \end{cases}$

552. On considère la droite $(\Delta) : y = \beta + m(x - \alpha)$.

1° Montrer que (Δ) passe par le point P (α, β). Calculer les coordonnées des points d'intersection A et B de (Δ) avec Ox et Oy, en fonction de α, β et m.

2° Calculer les coordonnées du point M de (Δ) symétrique de P par rapport au milieu de AB. Construire, lorsque m varie, le lieu (Γ) du point M (on prendra $\alpha = 3$ et $\beta = 2$).

3° Pour quelle valeur de m, le point M est-il en P, et quelles sont alors les valeurs de $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$? En déduire une construction de la tangente en un point quelconque de (Γ).

553. Soient D_1 et D_2 deux droites variables d'équations :

$$y - 3 + m(x - 2) = 0 \quad \text{et} \quad y + 3 - m(x + 2) = 0.$$

1° Montrer que D_1 passe par un point fixe A et D_2 par un point fixe B.

2° Trouver les coordonnées du point d'intersection M de D_1 et D_2. Équation et construction du lieu (Γ) de M.

3° Pour quelles valeurs de m le point M est-il en A ou en B ? En déduire les équations des tangentes en A et en B à (Γ).

554. On considère l'hyperbole (H) : $y = \dfrac{3}{x}$ et la droite (Δ) variable : $y = -3x + 2m$.

1° Pour quelles valeurs de m la droite coupe-t-elle la courbe en deux points A et B distincts ou confondus ? Calculer les coordonnées de A et B pour $m = 5$.

2° Soient C et D les points d'intersection de (Δ) avec les axes Ox et Oy. Montrer que les segments AB et CD ont même milieu I en calculant les coordonnées X et Y de ce point.

3° Trouver le lieu du point I, déterminer l'équation des tangentes à la courbe (H) aux points qui limitent ce lieu.

555. On considère la courbe : $y = \dfrac{a}{x}$ et la droite $(\Delta) : y = mx + p$.

1° Établir la condition pour que la droite coupe la courbe en deux points distincts ou confondus.

2° Calculer m et p pour que la droite (Δ) soit tangente à la courbe au point M d'abscisse $x = \alpha$. Faire la figure en supposant $a = 6$ et $\alpha = 3$.

3° Soient H et K les projections de M sur les axes Ox et Oy et A et B les intersections de la tangente en M avec les axes. Montrer que H et K sont les milieux de OA et OB. En déduire une construction géométrique de cette tangente.

556. Soit en orthonormées l'hyperbole (H) d'équation $y = \dfrac{6}{x}$ et les points A, B et C de cette courbe d'abscisses respectives 1, -2 et 3.

1° Établir les équations de la droite BC et de la droite AA′ perpendiculaire en A′ à BC.

2° La droite AA′ recoupe (H) en D. Calculer ses coordonnées. Comparer les directions de AB et CD, puis de AC et BD.

3° Généraliser en prenant pour abscisses de A, B et C trois nombres quelconques α, β et γ. A quelle condition D est-il en A ? Trouver la valeur de l'angle BAC dans ce cas et comparer la direction de BC à celle de la tangente en A.

557. 1° Étudier la fonction $y = \dfrac{1}{2x}$ et construire sa courbe représentative (Γ) en orthonormées. Préciser ses symétries.

2° On coupe (Γ) par des droites (D) d'équation $y = x + h$. Propriété des droites (D) quand h varie. Calculer les coordonnées des points A et B d'intersection de (Γ) et (D) en fonction de h.

3° On marque sur (Γ) le point C d'abscisse $x = \dfrac{1}{2}$. Déterminer h pour que ABC soit rectangle en A. Que sont alors les points B et C ? (A est d'abscisse positive.)

558. 1° Construire, sur le même graphique, les courbes (P) et (H) représentatives des fonctions :

$$\text{(P)} \quad y = 3x^2, \qquad \text{(H)} \quad y = \frac{3}{x}.$$

(P) et (H) se coupent en un point A. Quelles sont les coordonnées de A ?

2° A quelle condition la droite (D), d'équation $y = 2x + a$, rencontre-t-elle (P) en deux points M′ et M″ ? On suppose cette condition réalisée; trouver les coordonnées du milieu I de M′M″ et montrer que I se déplace sur une parallèle à Oy quand (D) varie.

3° Montrer que (D) rencontre toujours (H) en deux points N′ et N″, et que le milieu K de N′N″ se déplace sur une droite passant par O.

— Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

559. $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. **560.** $y = \dfrac{2x}{x-2}$. **561.** $y = \dfrac{x+3}{x}$.

562. $y = \dfrac{2x+3}{4x-5}$. **563.** $y = \dfrac{2x-1}{3x+4}$. **564.** $y = \dfrac{1-2x}{3x-2}$.

— Résoudre graphiquement et vérifier par le calcul les systèmes suivants :

565. $\begin{cases} y = \dfrac{x-6}{x-1} \\ y = 5x - 14. \end{cases}$ **566.** $\begin{cases} y = \dfrac{2(1-x)}{x-3} \\ 3x - 2y = 2. \end{cases}$

567. $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ xy = 2x + 3y + 2. \end{cases}$ **568.** $\begin{cases} 4x - 5y = 14 \\ xy + y = 14. \end{cases}$

569. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2xy - 2x + 3y = 7. \end{cases}$ **570.** $\begin{cases} 2xy - 5y + 4 = 0 \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

571. $\begin{cases} y = \dfrac{4}{x} \\ y = \dfrac{6 - 2x}{x - 1}. \end{cases}$ **572.** $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{x + 4} \\ y = \dfrac{6 - x}{x - 2}. \end{cases}$ **573.** $\begin{cases} y = \dfrac{x - 3}{x + 1} \\ y = \dfrac{x + 2}{3(x + 1)}. \end{cases}$

574. $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x - 1} \\ y = -x^2 + 5x - 2. \end{cases}$ **575.** $\begin{cases} y = -\dfrac{4}{x} \\ y = \dfrac{x^2}{2} - 2x - \dfrac{5}{2}. \end{cases}$ **576.** $\begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{2}{x}. \end{cases}$

577. Déterminer l'hyperbole : $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$:

1° Passant par les points : A $(-3; -1)$, B$(0; 5)$ et C $(3; 2)$.

2° Passant par le point : A $(2; 1)$ et admettant pour centre le point ω $(-1; +3)$.

3° Asymptote à la droite $x = -2$ et tangente à la droite $y = \dfrac{3x}{2} + 1$ au point A $(0, 1)$.

578. Démontrer que l'hyperbole : $y = \dfrac{mx - 1}{x - m}$ passe par deux points fixes A et B, et montrer que lorsque m varie, le centre de l'hyperbole décrit une droite, perpendiculaire à AB si le repère xOy est orthonormé.

579. On donne les fonctions : $y = ax^2 + bx + 3$ et $y = \dfrac{Ax + 3}{x + D}$.

1° Calculer les valeurs de a et b, A et D de manière que chacune des courbes représentatives C_1 et C_2 passe par les points M_1 $(-2; -1)$ et M_2 $(-3; 0)$ dans un système d'axes de coordonnées rectangulaires.

2° Construire les courbes représentatives des fonctions obtenues en remplaçant a et b d'une part, A et D d'autre part par les valeurs trouvées.

3° Calculer les coordonnées du troisième point d'intersection des deux courbes.

580. On donne la fonction $y = \dfrac{x(m + 1) + m + 3}{mx + 2}$ où m est un paramètre différent de zéro.

On désigne par (H) la courbe représentative.

1° Tracer la courbe (H) relative à $m = -1$ dans un repère orthonormé.

2° Trouver le sens des variations de y suivant les valeurs de m.

3° Trouver la relation indépendante de m liant les coordonnées du point de rencontre des asymptotes de (H). En déduire le lieu de ce point et construire ce lieu.

581. Soit la relation : $(m + 1)xy - my - x + 1 = 0,$ (1)
où m désigne une constante.

1° Montrer qu'elle définit une fonction croissante y de la variable x.

2° Peut-on déterminer m pour que cette relation soit vérifiée par des valeurs numériques égales de x et de y?

3° Dans le cas où la relation (1) est vérifiée pour $x = y = \alpha$ et $x = y = \beta$ $(\alpha < \beta)$, on pose :

$$X = \frac{x - \alpha}{x - \beta}, \qquad Y = \frac{y - \alpha}{y - \beta}.$$

Montrer, sans préciser la forme de la constante k, que Y est lié à X par une relation de la forme $Y = kX$.

4° Donner la valeur numérique de k lorsque $m = -\dfrac{3}{2}$.

582. On considère la fonction $y = \frac{3mx}{m - 3x}$, où m est un paramètre fixe, mais qui peut prendre une valeur quelconque entre $-\infty$ et $+\infty$.

1° Pour une valeur donnée de m quelconque, construire le graphe de cette fonction.

2° Si m varie, quel est le lieu géométrique du point de rencontre des asymptotes ?

3° Déterminer m pour que la courbe passe par un point L donné de coordonnées (a, b). Construire la courbe pour $a = 2$ et $b = -6$.

583. On considère la fonction $y = f(x) = \frac{4 - x}{2x - 4}$.

1° Trouver par une étude directe les valeurs de x pour lesquelles y reste compris entre -1 et $+1$.

2° Tracer en orthonormées la courbe $y = f(x)$ et vérifier sut le graphe les résultats de l'étude précédente.

3° Vérifier que le produit des valeurs que prend $f(x)$ pour deux valeurs quelconques de x ayant pour somme 6 est constant.

4° Plus généralement, montrer que si : $F(x) = \frac{ax + b}{a'x + b'}$, a et a' étant tous deux différents de zéro, de même que $ab' - ba'$, il existe un nombre x_0 tel que le produit : $F(x_0 + h) F(x_0 - h)$ admet une valeur P indépendante de h.

584. 1° Tracer, dans un repère rectangulaire xOy, le graphe (L) de la fonction : $y = 2(x + 1)$ et le graphe (C) de la fonction : $y = \frac{5}{2(x+1)}$. Déterminer les points communs à ces deux graphes.

2° Par un point M de (L) on mène la parallèle MA à Oy, coupant (C) en A, et la parallèle MB à Ox, coupant (C) en B. Soit P le quatrième sommet du rectangle construit sur MA et MB. Démontrer que le point P appartient à la ligne (L). Lieu géométrique du milieu D de AB quand M parcourt (L).

585. Soient deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Construire sur un même graphique les courbes représentatives H et P des fonctions $y = \frac{1}{2x}$ et $y = 4x^2$, et déterminer les coordonnées du point A commun à ces deux courbes, ainsi que les coordonnées du deuxième point de rencontre B de la droite OA avec la courbe (H). Donner l'équation de la droite OA.

2° On joint le point A au point C d'abscisse $x = 1$, d'ordonnée $y = 0$. Montrer que CA est tangent en A à la courbe H et déterminer les coordonnées du second point de rencontre de CA avec la courbe (P).

3° On considère une droite Δ parallèle à CA, coupant l'axe des y au point M d'ordonnée m. Déterminer suivant les valeurs de m le nombre des points communs à Δ et à la courbe (H). Dans le cas où il y a deux points d'intersection, on désignera par N et N' ces deux points. Calculer les coordonnées du milieu I du segment NN' et en déduire le lieu de ce point I.

4° a, b, n, n' désignant les projections des points A, B, N, N' sur l'axe $x'Ox$, démontrer la double relation : $\overline{Oa}^2 = \overline{Ob}^2 = \overline{On}.\overline{On'}$.

586. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \frac{2x - 3}{-x + 3}$ et tracer la courbe représentative (H). Construire sur le même graphique la droite (D) d'équation : $y = 3x + 1$. La courbe (H) et la droite (D) ont deux points communs A et B. Calculer les coordonnées de A et de B.

2° Par le point de l'axe des y qui a pour ordonnée m on mène la parallèle (D') à (D). Quelle est l'équation de (D') ? A quelles conditions doit satisfaire m pour que (D') et (H) se coupent ?

3° Dans le cas où (D') et (H) ont deux points communs (que l'on désignera par A' et B'), trouver les coordonnées du milieu I de A'B'. Montrer que I se déplace sur une droite fixe (Δ) quand (D') se déplace en restant parallèle à (D). Montrer que (Δ) passe par le centre de symétrie de (H) et qu'aux points où (Δ) coupe (H), la tangente à (H) est parallèle à (D).

587. 1° Déterminer les coefficients b et c du trinôme : $x^2 + bx + c$ de manière que ce trinôme passe par un minimum égal à -1 quand x prend la valeur -2.

2° Les coefficients b et c ayant les valeurs déterminées au paragraphe 1, construire avec précision les courbes : $(C_1)\ y = x^2$, $(C_2)\ y = \dfrac{(2b-c)x + 2c}{x+b-2}$ rapportées à un même repère orthonormé xOy. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

3° Former l'équation donnant les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Comparer l'équation obtenue avec l'équation : $(x-2)(x^2+bx+c) = 0$ où b et c sont les valeurs déterminées au paragraphe 1 et calculer les coordonnées des points d'intersection des deux courbes. On désigne par A et B ceux des points d'intersection dont l'abscisse est supérieure à (-2). Déterminer l'angle de droite AB avec l'axe Ox.

4° On coupe la courbe (C_1) par une droite variable parallèle à AB. Lieu du milieu de la corde A_1B_1 interceptée. Même question en remplaçant la courbe (C_1) par la courbe (C_2).

588. 1° On donne l'équation : $(m+2)^2t^2 - 3(m+2)t + m(3-m) = 0$, dans laquelle t désigne l'inconnue et m un paramètre variable. Démontrer que cette équation a des racines quel que soit m différent de -2, et que ces racines sont des fonctions homographiques de m. Pour quelle valeur de m l'équation a-t-elle une racine double, et quelle est sa valeur ?

2° Étudier les variations des deux fonctions : $y = \dfrac{x}{x+2}$, $y = \dfrac{3-x}{x+2}$, et construire sur une même figure leurs courbes représentatives. Comment se coupent ces deux courbes ?

Quelles relations peut-on établir entre cette partie du problème et la partie qui fait l'objet du 1° ci-dessus ?

589. 1° Résoudre l'inégalité : $\dfrac{3-x}{2x-1} < \dfrac{1}{2}(5x-1)$.

2° Étudier la variation de la fonction : $y = f(x) = \dfrac{3-x}{2x-1}$ et tracer sa courbe représentative en prenant comme unité 2 cm dans un repère orthonormé.

3° Retrouver les résultats du 1° en utilisant le tracé du 2°.

590. 1° Construire la courbe (H) représentant la fonction : $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

2° Construire la courbe (H') représentant la fonction : $y = \dfrac{m}{x}$, où m désigne une constante positive ou négative.

3° Déterminer les coordonnées des points d'intersection M et N des courbes (H) et (H'). Discuter suivant la valeur de m.

4° Montrer qu'il existe une relation indépendante de m entre les abscisses x' et x'' de M et de N et une autre relation, indépendante de m, entre leurs ordonnées y' et y''.

5° Calculer explicitement les coordonnées des points M et N dans le cas où $m = -3$.

FONCTION : $y = x^3 + px + q$

158. Étude de la fonction : $y = x^3$.

La fonction $y = x^3$ est définie et continue (n° 87) pour toutes les valeurs de x, car quel que soit x on peut calculer x^3.

Sa dérivée $y' = 3x^2$ est nulle pour $x = 0$, positive pour $x \neq 0$. La fonction, croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$, est donc croissante sur $]-\infty, +\infty[$. Pour $x = 0$, on a $y = 0$ et lorsque x tend vers $\pm\infty$, il en est de même de y. Pour obtenir $|y| > 10^6$ par exemple il suffit de prendre $|x| > 10^2$. On obtient le tableau de variation :

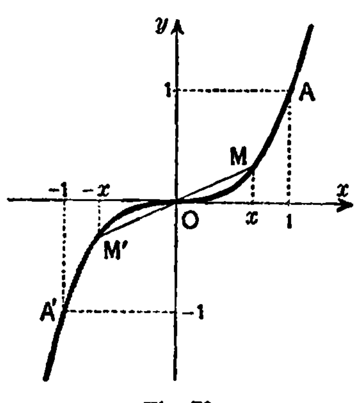


Fig. 79.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

La courbe représentative (fig. 79) est tangente en O à Ox car pour $x = 0$ on a $y = 0$ et $y' = 0$. Elle passe en particulier par les points

$$A(+1, +1) \text{ et } A'(-1, -1).$$

La fonction $y = x^3$ est impaire. A deux valeurs opposées de x correspondent deux valeurs opposées de y et les points correspondants

$$M(x, x^3) \text{ et } M'(-x, -x^3)$$

sont symétriques par rapport à O, dans tout repère cartésien (n° 86) :

Le point O *est un centre de symétrie de la courbe* $y = x^3$.

Les deux arcs de courbe $x > 0$ et $x < 0$ sont donc de part et d'autre de la tangente en O, c'est-à-dire de $x'x$. *Le point* O *est un point d'inflexion de la courbe*, ce qui résulte du fait que $y'' = 6x$ s'annule en changeant de signe pour $x = 0$ (n° 120).

159. Étude de la fonction : $y = x^3 + x + 2$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit x. La dérivée : $y' = 3x^2 + 1$ est toujours positive. La fonction est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

Pour $x = 0$, on a $y = 2$. Pour $x \neq 0$, on peut écrire : $y = x^3\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$.

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, le facteur entre parenthèses tend vers $+1$ et (n° 83) : y tend, comme x^3, vers $\pm\infty$.

On obtient le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	1	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

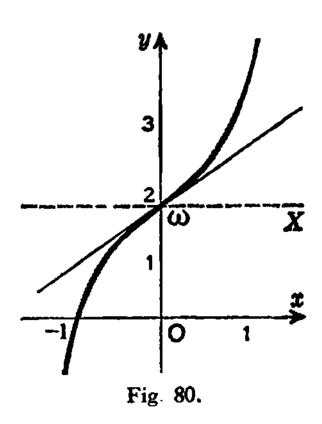


Fig. 80.

La courbe représentative (fig. 80) coupe Oy au point ω (0, 2) et admet pour tangente en ce point la droite $y - 2 = 1\,(x - 0)$, soit $y = x + 2$.

Elle coupe l'axe Ox en un seul point pour

$$x^3 + x + 2 = 0, \quad \text{soit } x = -1.$$

Équation réduite. — Prenons comme nouveau repère $X\omega Y$ se déduisant du repère xOy par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$. On obtient les formules $x = X$ et $y = 2 + Y$ et l'équation $y = x^3 + x + 2$ devient : $Y = X^3 + X$. On voit que Y est une fonction impaire de X. Il en résulte comme au paragraphe précédent que le point ω est un *centre de symétrie* de la courbe. Par suite les deux branches de courbe pour $x > 0$ et $x < 0$ sont de part et d'autre de la tangente en ω. *Le point ω est donc un point d'inflexion de la courbe.*

160. Étude de la fonction : $y = x^3 - 3x + 1$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit x. Sa dérivée $y' = 3\,(x^2 - 1)$ s'annule pour $x = -1$ et $x = +1$. Elle est positive pour $x < -1$ ou $x > 1$, négative pour $-1 < x < 1$.

Pour $x = 0$, on a $y = 1$. Pour $x \neq 0$, on peut écrire $y = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$.

Lorsque x tend vers $\pm\infty$ le facteur entre parenthèses tend vers $+1$ et x^3 tend vers $\pm\infty$, il en est donc de même de y (n° 83). D'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

La fonction $y = x^3 - 3x + 1$ admet donc un maximum égal à $+3$ pour $x = -1$ et un minimum égal à -1 pour $x = +1$.

La courbe représentative (fig. 81) admet deux sommets où la tangente est parallèle à Ox :

$$A(-1, +3) \text{ et } B(+1, -1).$$

Elle coupe Oy au point ω (0, + 1) et coupe l'axe Ox en trois points dont les abscisses sont les racines de l'équation : $x^3 - 3x + 1 = 0$.

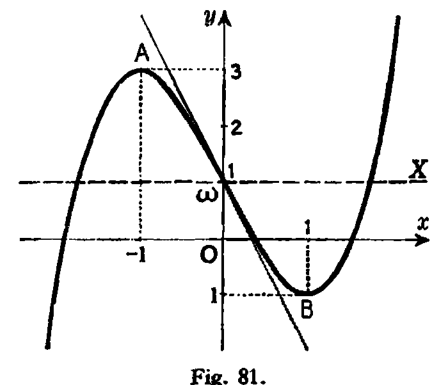


Fig. 81.

Équation réduite. — Prenons comme nouveau repère $X\omega Y$ se déduisant de xOy par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ (0, 1). On obtient : $x = X$ et $y = Y + 1$.

La courbe admet comme nouvelle équation : $Y = X^3 - 3X$.

Y étant une fonction impaire de X, le point ω est un *centre de symétrie* de la courbe. La tangente en ω, dont l'équation est $y = -3x + 1$, traverse donc la courbe : *le point ω est un point d'inflexion.*

161. Cas général. — La fonction $y = x^3 + px + q$ admet pour dérivée première $y' = 3x^2 + p$, et pour dérivée seconde : $y'' = 6x$.

Elle est toujours croissante si $p \geqslant 0$. Elle admet un maximum et un minimum pour $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ si p est négatif.

La courbe représentative qui admet le point $\omega\,(0, q)$ pour centre de symétrie et pour point d'inflexion, présente la disposition de la figure 80, pour $p \geqslant 0$, celle de la figure 81 pour $p < 0$. Elle tourne sa concavité du côté des y positifs pour $x > 0$, du côté des y négatifs pour $x < 0$.

Comme y varie de $-\infty$ à $+\infty$, la courbe coupe l'axe Ox en un seul point si $p \geqslant 0$. Elle peut la couper en trois points pour $p < 0$ si, comme dans la figure 81, le maximum et le minimum de y sont de signes différents.

162. Discussion de l'équation : $x^3 + px + q = 0$. — Montrons que l'on peut toujours ramener à cette forme l'équation générale : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ qui s'écrit :

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + d = 0$$

ou : $$\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \lambda x + \mu = 0.$$

En posant : $x + \dfrac{b}{3a} = \mathrm{X}$ on obtient :

$$\mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q = 0.$$

Ceci dit, l'équation :

$$f(x) \equiv x^3 + px + q = 0$$

a trois racines distinctes si et seulement si $f(x)$ admet un maximum et un minimum de signes contraires. Or $f'(x) = 3x^2 + p$ s'annule si p est négatif pour $x = \alpha = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ et pour $x = -\alpha = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ (fig. 82).

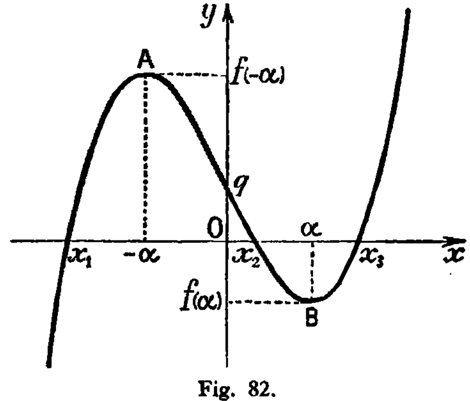


Fig. 82.

La condition $f(\alpha).f(-\alpha) < 0$ s'écrit puisque $p = -3\alpha^2$:
$(\alpha^3 + p\alpha + q)(-\alpha^3 - p\alpha + q) < 0 \Longleftrightarrow (-2\alpha^3 + q)(2\alpha^3 + q) < 0$ ou $-4\alpha^6 + q^2 < 0$
ce qui donne : $4p^3 + 27q^2 < 0$, condition qui implique $p < 0$.

Si $4p^3 + 27q^2 = 0$ on a : $f(\alpha).\,f(-\alpha) = 0$. Il y a une racine double (α ou $-\alpha$) vérifiant $f(x) = f'(x) = 0$ et une racine simple x_1. La racine double x_2 vérifie : $3f(x) - xf'(x) = 0$ donc $2px + 3q = 0$, ce qui donne : $x_2 = -\dfrac{3q}{2p}$. En identifiant $f(x)$ et $(x - x_1)(x - x_2)^2$, on trouve $x_1 = -2x_2$ donc $x_1 = \dfrac{3q}{p}$. En résumé :

$4p^3 + 27q^2 < 0$:	*3 racines réelles distinctes.*
$4p^3 + 27q^2 = 0$:	*1 racine simple* $\dfrac{3q}{p}$, *une racine double* $-\dfrac{3q}{2p}$.
$4p^3 + 27q^2 > 0$:	*1 seule racine réelle.*

FONCTION : $y = ax^4 + bx^2 + c$

163. Étude de la fonction : $y = x^4$. — Cette fonction est définie et continue (n° 87) quel que soit x. Sa dérivée $y' = 4x^3$ est du signe de x. La fonction est donc **décroissante** pour $x < 0$, croissante pour $x > 0$. Elle admet pour $x = 0$, un minimum égal à 0.

Lorsque x tend $\pm\infty$, y tend vers $+\infty$. Pour obtenir $y > 10^8$ par exemple, il suffit de prendre $|x| > 10^2$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Fig. 83.

Rapportée à un repère rectangulaire (fig. 83), la courbe représentative rappelle la courbe $y = x^2$ mais est moins évasée. Comme x^4 est une fonction paire : $f(-x) = f(x)$, les points M (x, x^4) et M'$(-x, x^4)$ sont symétriques par rapport à Oy. *La courbe admet* Oy *pour axe de symétrie et* Ox *pour tangente au sommet.*

D'autre part : $y'' = 12x^2$ est positif pour $x \neq 0$. La courbe tourne sa concavité du côté des y positifs (n° 119).

164. Étude de la fonction : $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

La fonction est définie et continue quel que soit x (n° 86). Sa dérivée s'écrit :

$$y' = -4x^3 - 4x = -4x(x^2 + 1).$$

Elle est du signe de $-x$ et s'annule pour $x = 0$. La fonction admet pour $x = 0$, un maximum égal à $+3$. Pour $x \neq 0$, on peut écrire $y = x^4\left(-1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right)$.

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, le facteur entre parenthèses tend vers -1. Comme x^4 tend vers $+\infty$, on voit (n° 83) que y tend vers $-\infty$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$+3$	↘	$-\infty$

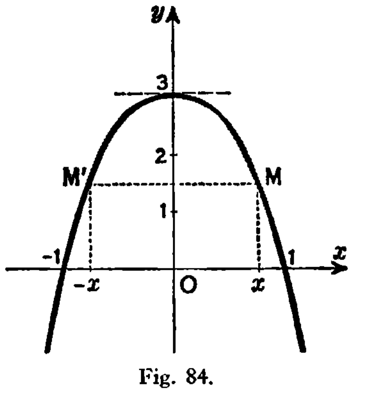


Fig. 84.

Rapportée à un repère rectangulaire la courbe représentative (fig. 84) admet l'axe Oy pour axe de symétrie car $f(-x) = f(x)$. Elle admet pour sommet le point A $(0, +3)$, pour tangente au sommet la droite $y = 3$ et coupe l'axe Ox pour $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$, donc pour $x = \pm 1$.

$y'' = -12x^2 - 4 = -4(3x^2 + 1)$ est négatif quel que soit x. La courbe est toujours concave du côté des y négatifs.

165. Étude de la fonction : $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit x (n° 87). Sa dérivée s'écrit :

$$y' = 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3).$$

Elle s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \pm\sqrt{3}$.

Comme $y = x^4\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{2x^4}\right)$, on voit que y tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	$\frac{5}{2}$	↘	-2	↗	$+\infty$

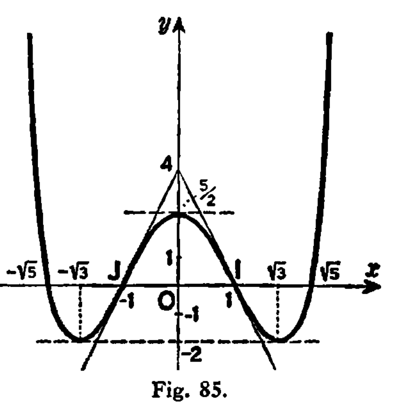


Fig. 85.

La fonction admet un maximum égal à $\frac{5}{2}$ pour $x = 0$ et un minimum égal à -2 pour $x = \pm\sqrt{3}$.

La courbe représentative (fig. 85) dans un repère rectangulaire, admet Oy pour axe de symétrie car y est une fonction paire : $f(-x) = f(x)$. Elle coupe Ox pour : $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ soit pour $(x^2 - 1)(x^2 - 5) = 0$. Il y a donc 4 points d'intersection d'abscisses ± 1 et $\pm\sqrt{5}$.

D'autre part $y'' = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$ s'annule pour $x = \pm 1$. Les points I (1 ; 0) et J(− 1 ; 0) sont des points d'inflexion admettant pour tangentes : $y = -4x + 4$ et $y = 4x + 4$.

La courbe tourne sa concavité du côté des y négatifs pour $-1 < x < 1$, du côté des y positifs pour $x < -1$ et pour $x > 1$.

166. Étude de la fonction : $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 1$.

Cette fonction est définie quel que soit x. Sa dérivée s'écrit :

$$y' = -x^3 + 4x = -x(x-2)(x+2).$$

Elle s'annule pour $x = 0$, $x = 2$ et $x = -2$.
Pour $x \neq 0$, on peut écrire :

$y = x^4\left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$. Lorsque x tend vers $\pm\infty$ le facteur entre parenthèses tend vers $-\frac{1}{4}$. Comme x^4 tend vers $+\infty$, il en résulte que y tend vers $-\infty$. On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		0		$+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

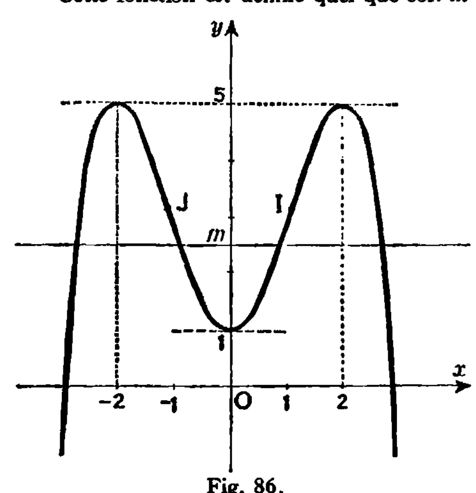


Fig. 86.

La fonction admet un maximum égal à $+5$ pour $x = \pm 2$ et un minimum égal à $+1$ pour $x = 0$.

Rapportée à un repère rectangulaire (fig. 86) la courbe représentative est symétrique par rapport à Oy car y est une fonction paire : $f(-x) = f(x)$. Elle coupe Ox pour $x^4 - 8x^2 - 4 = 0$ soit en deux points d'abscisses : $x = \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{5}}$

D'autre part : $y'' = -3x^2 + 4$. La courbe admet deux points d'inflexion I et J pour $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Elle est concave du côté des y positifs entre ses deux points d'inflexion, du côté des y négatifs à l'extérieur de ces deux points.

167. Application. — *Discuter suivant les valeurs de m le nombre des racines de l'équation :* $x^4 - 8x^2 + 4m - 4 = 0$.

Résolue en m cette équation s'écrit : $-\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 1 = m$. C'est l'équation aux abscisses des points d'intersection de la courbe ci-dessus (fig. 86) et de la droite variable $y = m$. On voit que pour :

$m > 5$: *Pas de racines.*

$m = 5$: *Deux racines doubles* $+2$ *et* -2.

$1 < m < 5$: *Quatre racines deux à deux opposées.*

$m = 1$: *Une racine double* 0 *et deux racines opposées* $\pm 2\sqrt{2}$.

$m < 1$: *Deux racines opposées.*

168. Cas général. — La fonction $y = ax^4 + bx^2 + c$ est définie quel que soit x et admet pour dérivée : $y' = 4ax^3 + 2bx = 2ax\left[2x^2 + \frac{b}{a}\right]$.

1° Si $\frac{b}{a} \geqslant 0$, cette dérivée a une seule racine $x = 0$ et est du signe de ax.

La courbe représentative n'a qu'un sommet et présente la disposition de la figure 83 pour $a > 0$, celle de la figure 84 pour $a < 0$,

2° Si $\frac{b}{a} < 0$, la dérivée y' s'annule pour $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. La courbe représentative, symétrique par rapport à Oy, admet trois sommets et présente la disposition de la figure 85 pour $a > 0$, celle de la figure 86 pour $a < 0$.

EXERCICES

— Étudier et représenter graphiquement les fonctions :

591. $y = x^3 + 2x$.

592. $y = x^3 - 3x$.

593. $y = x^3 + x - 2$.

594. $y = x^3 - 2x + 1$.

595. $y = x^3 - 2x + 1$.

596. $y = x^3 - 3x - 2$.

597. $y = x^3 + 2x - 3$.

598. $y = x^3 - 6x + 4$.

599. $y = y^3 + 2x + 1$.

600. $y = 3x^3 - 3x + 2$.

601. $y = x^3 + x - 3$.

602. $y = x^3 - 6x + 4$.

603. $y = -x^3 + 3x + 2$.

604. $y = x^3 - 2x - 3$.

605. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

606. $y = -\frac{x^3}{3} + x - 5$.

607. $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$.

608. $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 7$.

609. $y = 2x^3 - \frac{17}{2}x^2 + 5x.$

610. $y = -\frac{5}{3}x^3 + 7x^2 + 3x - 4.$

611. $y = x^3 - 12x^2 + 16.$

612. $y = x^3 - \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}.$

613. $y = x^4 + 3x^2.$

614. $y = x^4 - 2x^2.$

615. $y = -\frac{x^4}{2} + 3x^2.$

616. $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2.$

617. $y = x^4 - 2x^3 + 1.$

618. $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 1.$

619. $y = 2x^4 - 3x^2 + 1.$

620. $y = x^4 - 6x^2 + 5.$

621. $y = 3x^4 + 2x^2 + 1.$

622. $y = -x^4 + 6x^2 - 9.$

623. $y = 2x^4 - \frac{15}{2}x^2 + 5.$

624. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4.$

625. $y = -x^4 + 2x^2 - 1.$

626. $y = -\frac{x^4}{2} + 3x^2 - \frac{5}{2}.$

627. $y = 5x^4 - 5x^2 + 1.$

628. $y = -\frac{3}{2}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}.$

629. 1° Étudier la variation de la fonction $y = x^3 - 6x + 5$ et tracer la courbe représentative (C) en prenant le centimètre pour unité sur chaque axe.

2° Soit I le point où la courbe (C) rencontre l'axe Oy. Montrer que ce point est un centre de symétrie de cette courbe.

3° Étudier graphiquement suivant les valeurs de m le nombre des racines de l'équation :

$$x^3 - 6x + 5 - m = 0.$$

630. 1° Étudier et représenter graphiquement la fonction $y = x^3 - 3x + 2.$

2° Déterminer et construire les tangentes aux points où la courbe rencontre les axes de coordonnées Ox et Oy.

3° Calculer les coordonnées des points de la courbe où la tangente est parallèle à la droite :

$$9x + 4y = 0.$$

631. On donne la fonction : $y = (x - 1)(x - 2)(x + 3).$

1° Étudier les variations de la fonction y et construire la courbe représentative (unités : 2 cm sur Ox et 1 cm sur Oy).

2° Équation des tangentes aux points de rencontre de la courbe avec Ox et avec Oy.

3° Discuter graphiquement le nombre des points d'intersection de la courbe avec une parallèle à l'axe Ox d'ordonnée m.

632. 1° Pour quelles valeurs de m la courbe (C) : $y = x^3 - 3mx + 2$ admet-elle des tangentes parallèles à Ox ? Trouver en fonction de m les coordonnées des points de contact.

2° Déterminer m pour que la courbe (C) soit tangente à Ox. Construire la courbe (C) correspondante.

3° Discuter suivant les valeurs de m le nombre des racines de l'équation : $x^3 - 3mx + 2 = 0.$

633. On coupe la courbe (C) : $y = x^3 - x$ par la droite variable $y = m(x + 1)$ issue du point fixe A $(-1, 0)$ de la courbe.

1° Déterminer m pour qu'il y ait, outre le point A, deux points d'intersection M′ et M″. Montrer que le milieu I de M′M″ se déplace sur une droite fixe.

2° Trouver l'équation de la tangente en A à la courbe C et l'équation de la tangente issue de A. Coordonnées du point de contact B de cette dernière.

634. Variation de $y = 4x^3 - 3x$. Courbe représentative. En déduire le nombre des racines de l'équation : $4x^3 - 3x = m$.

635. Soit la famille de courbes d'équation : $y = x^3 + px$ où p est un paramètre variable.
Étudier selon les valeurs de p les formes de courbe possible. Discuter le nombre des points d'intersection avec la droite d'équation $y = -q$ où q est un paramètre variable.

636. 1° Représenter graphiquement les variations de la fonction $y = x^3 - 2x^2$.

2° On désigne par M, N les points de la courbe représentative C d'abscisses 1 et 3. Déterminer l'équation de la droite MN qui sera mise sous la forme $y = ax + b$.

Calculer les coordonnées du point P (distinct de M et N) d'intersection de cette droite et de la courbe C.

637. On considère la fonction $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1° Déterminer les coefficients a, b, c, d de façon que la fonction admette, pour la valeur $x = 0$, un maximum $y = 10$ et pour la valeur $x = 2$, un minimum $y = 6$. Construire la courbe représentant les variations de la fonction obtenue.

2° La courbe coupe la droite d'équation $y = 10$ en un point M d'abscisse $x = 0$ et en un point A; la droite d'équation $y = 6$ au point N d'abscisse $x = 2$ et en un point B. Calculer les coordonnées des points A et B. Vérifier que les droites MN, AB se coupent en un point C appartenant à la courbe. Montrer que ce point est un centre de symétrie de la courbe.

638. 1° Étudier les variations de la fonction $y = -\frac{x^3}{3} + 3x$ et construire la courbe représentative. Déterminer les points d'intersection de la courbe avec l'axe $x'x$ et les tangentes en ces points.

2° On coupe la courbe par une droite passant par le point A de coordonnées : $x_0 = 3$; $y_0 = 0$ et d'équation $y = m(x - 3)$. Déterminer les abscisses des points d'intersection de cette droite et de la courbe. On trouve, en général, deux points B et C autres que A. Conditions que doit remplir m pour que ces points existent ?

3° Quelle est l'abscisse du milieu M de BC ? En déduire le lieu de ce point.

639. 1° Déterminer un polynôme du 3e degré, sachant qu'il passe par un minimum égal à 2 pour $x = 1$ et que son reste de division par $x^2 + 3x + 2$ est $-x + 3$.

2° Construire la courbe représentative (C).

3° Que devient l'équation de cette courbe si l'on transporte l'origine au point (1, 2) ?

640. 1° Étudier les variations de la fonction $y = x^3 + 2x^2 - 4$ et tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé.

2° Sur les mêmes axes de coordonnées, construire la courbe représentant la fonction $y = -x^2$; montrer que les deux courbes précédentes se coupent en des points dont les abscisses sont déterminées par l'équation : $(x - 1)(x + 2)^2 = 0$ et calculer les coordonnées des points d'intersection.

3° Calculer, en chaque point d'intersection, la tangente trigonométrique de l'angle des deux courbes.

641. On donne la fonction $y = (x - a)(x - b)(x - c)$ de la variable x où a, b, c sont 3 nombres donnés ($a < b < c$).

1° Calculer la dérivée y' de la fonction y et démontrer que l'équation du 2e degré $y' = 0$ a une racine entre a et b et une racine entre b et c. Ces racines correspondent l'une à un maximum, l'autre à un minimum de y.

2° Qu'arrive-t-il si $a = b$?

3° En supposant $a = b = -1$ et $c = 0$, étudier les variations de y, et tracer la courbe représentative.

642. 1° Construire la courbe représentative des variations de la fonction $y = 4x^3 - 3x + a$. Montrer qu'elle présente un centre de symétrie qu'on déterminera. Comment le changement de valeur du paramètre modifie-t-il la courbe ?

2° On considère l'équation : $4x^3 - 3x + a = 0$. Trouver, au moyen de l'étude précédente, les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire a, pour qu'elle ait trois racines réelles.

3° En se supposant placé dans ce dernier cas, quelles sont, lorsque a varie, la plus grande et la plus petite des valeurs que puissent prendre les racines ? Quelles valeurs faut-il donner à a pour que ce nombre soit une des racines de l'équation proposée ? Lorsqu'il en est ainsi, résoudre complètement cette équation.

643. 1° Construire en orthonormées la courbe (C) d'équation : $y = \frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 9)$. Déterminer ses intersections A,B,C,D avec la droite $y = 1$ et démontrer que les quatre droites OA, OB, OC, OD forment un faisceau régulier.

2° Équation des tangentes aux points d'inflexion I et J. Déterminer les points P et Q où les tangentes sont parallèles aux précédentes. Nature du quadrilatère formé par ces quatre tangentes.

3° Étudier en utilisant la courbe (C) l'existence des racines de l'équation :

$$x^4 - 6x^2 + 9 - 8m = 0$$

et la position de ces racines par rapport aux nombres -1 et $+3$.

644. 1° Dans un repère rectangulaire, construire la courbe (C) d'équation : $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$. Déterminer ses sommets, ses points d'inflexion et les tangentes aux points d'inflexion.

2° Établir, en fonction de α, l'équation de la tangente à (C) au point M d'abscisse $x = \alpha$. Montrer que l'équation donnant les abscisses des points d'intersection de cette tangente avec (C) peut s'écrire sous la forme : $(x - \alpha)^2 (x^2 + 2\alpha x + 3\alpha^2 - 6) = 0$.

3° Pour quelles valeurs de α, la tangente en M recoupe-t-elle la courbe (C) en deux points P et Q ? Coordonnées, en fonction de α, du milieu K du segment PQ ? Lorsque α varie le point K décrit un arc d'une courbe (γ) dont on établira l'équation et que l'on construira sur le même graphique que (C).

4° La tangente d'inflexion en I à (C) recoupe cette courbe en R. Montrer que cette droite IR est tangente à (γ) en un point N milieu du segment IR.

PRODUIT SCALAIRE

169. Angle de deux vecteurs. — ***On appelle angle de deux vecteurs l'angle saillant obtenu en menant par un point arbitraire les demi-droites parallèles à ces vecteurs et de même sens.***

L'angle des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ (fig. 86) est l'angle saillant $xOy = \theta$, compris entre 0 et deux droits, obtenu en menant par un point arbitraire O de l'espace les demi-droites Ox et Oy respectivement parallèles aux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, et de même sens. On sait que l'angle obtenu est indépendant du sommet choisi O.

170. Définition du produit scalaire de deux vecteurs. — ***Le produit scalaire de deux vecteurs est le nombre relatif égal au produit de leurs modules par le cosinus de leur angle.***

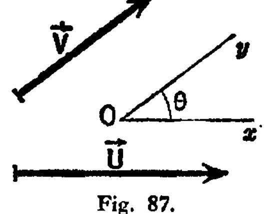


Fig. 87.

Soient $|\vec{U}| = u$; $|\vec{V}| = v$ les modules (ou longueurs) des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et θ leur angle (fig. 87). Leur produit scalaire se représente par le symbole : $\vec{U}.\vec{V}$ (lire $\vec{U}$ scalaire $\vec{V}$) et :

$$\boxed{\vec{U}\,.\,\vec{V} = uv\cos\theta}$$

171. Remarques. — 1° ***Le produit scalaire du vecteur $\vec{U}$ par lui-même est son carré scalaire $\vec{U}^2$.***

On obtient : $\vec{U}^2 = \vec{U}.\vec{U} = u^2$ et $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.
En particulier, le carré scalaire d'un vecteur unitaire est égal à 1 :

$$|\vec{i}| = 1 \implies \vec{i}^2 = 1.$$

2° ***Le produit scalaire de deux vecteurs unitaires est égal au cosinus de leur angle.***

$$|\vec{i}| = 1 \quad \text{et} \quad |\vec{j}| = 1 \implies \vec{i}\,.\,\vec{j} = \cos\theta.$$

3° ***Pour que deux vecteurs non nuls aient un produit scalaire nul, il faut et il suffit que ces vecteurs soient orthogonaux.***

En effet, pour que le produit $uv\cos\theta$ soit nul, avec $u \neq 0$ et $v \neq 0$, il faut et il suffit que : $\cos\theta = 0 \iff \theta = 1^D$.
En outre : $uv\cos\theta > 0 \iff \theta$ aigu et : $uv\cos\theta < 0 \iff \theta$ obtus.

172. Théorème fondamental. — ***Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit des mesures algébriques de l'un d'eux et de la projection orthogonale de l'autre sur lui.***

Considérons (fig. 88) : $\overrightarrow{OA} = \vec{U}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{V}$. Soit B' la projection orthogonale de B sur le support $x'x$ de $\overrightarrow{OA}$ orienté dans le sens $\overrightarrow{OA}$. Les projections des vecteurs $\vec{V}$ et $\overrightarrow{OB}$ sur l'axe $x'x$ sont des vecteurs égaux et :

$$\overline{OA} = u;\ \overline{OB'} = OB \cos \widehat{AOB} = v \cos \theta.$$

Donc : $\overline{OA}.\overline{OB'} = uv \cos \theta = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \vec{U}.\vec{V}.$

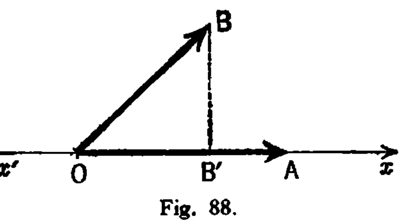


Fig. 88.

Si l'on change le sens de l'axe $x'x$, le produit $\overline{OA}.\overline{OB'}$ reste invariant. Donc, quel que soit le sens de l'axe $x'x$:

$$\vec{U}\,.\,\vec{V} = \overline{OA}\,.\,\overline{OB'} = \overline{OB}\,.\,\overline{OA'}.$$

173. Corollaires. — 1° ***On ne change pas un produit scalaire en remplaçant l'un des vecteurs par sa projection orthogonale sur le support de l'autre.***

Ainsi (fig. 89) : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{OI} = \overline{A'B'}\,.\,\overline{OI} = \overrightarrow{A'B'}\,.\,\overrightarrow{OI}.$

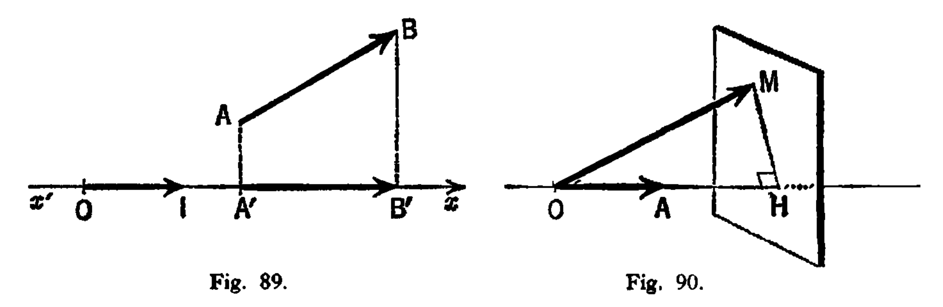


Fig. 89. Fig. 90.

Si on déplace A (ou B) dans un plan perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OI}$ le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OI}$ reste invariant, car les points A' et B' restent fixes.

2° ***La mesure algébrique de la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe est le produit scalaire de ce vecteur et du vecteur unitaire de l'axe.***

Si $\overrightarrow{OI}$ a pour module 1 (fig. 89) : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{OI} = \overline{A'B'}\,.\,\overline{OI} = \overline{A'B'}.$

3° Soient $\overrightarrow{OA}$ un vecteur fixe et $\overrightarrow{OM}$ un vecteur variable (fig. 90) tels que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = k$, constante donnée. Soit H la projection orthogonale de M sur la droite OA :

$$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OM} = \overline{OA}\,.\,\overline{OH} = k.$$

Le point H est donc un point fixe et le lieu géométrique du point M est le plan perpendiculaire en H à la droite OA.

PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE

174. Commutativité. — ***Le produit scalaire est commutatif.***

En effet (fig. 87) : $\vec{U}\,.\,\vec{V} = \vec{V}\,.\,\vec{U} = uv \cos \theta.$

175. Multiplication par un nombre relatif. — ***Si dans un produit scalaire on multiplie l'un des vecteurs par le nombre relatif m, le produit scalaire est multiplié par m :***

Construisons (fig. 91) : $\overrightarrow{OA} = \vec{U}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{V}$ et $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} = m\vec{U}$. En désignant par B' la projection orthogonale de B sur OA, on sait que :

$$\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} \implies \overline{OC} = m\overline{OA}$$

et : $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \overline{OC} \cdot \overline{OB'} = m\overline{OA} \cdot \overline{OB'} = m(\overline{OA} \cdot \overline{OB'}) = m(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})$

soit : $$\boxed{(m\vec{U}) \cdot \vec{V} = m(\vec{U} \cdot \vec{V})}.$$

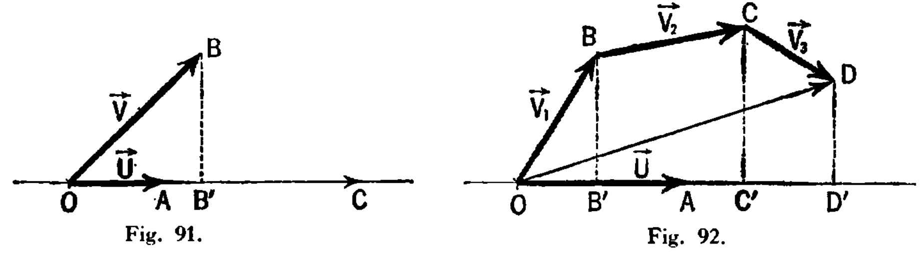


Fig. 91. Fig. 92.

Donc : $(m\vec{U}) \cdot (n\vec{V}) = m[\vec{U} \cdot (n\vec{V})] = mn(\vec{U} \cdot \vec{V}) \implies \boxed{(m\vec{U}) \cdot (n\vec{V}) = mn(\vec{U} \cdot \vec{V})}$

176. Distributivité. — ***Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition vectorielle.***

Soient (fig. 92) : $\overrightarrow{OA} = \vec{U}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{V_1}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{V_2}$; $\overrightarrow{CD} = \vec{V_3}$ et $\overrightarrow{OD} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}$.

Désignons par B', C' et D' les projections orthogonales de B, C et D sur la droite OA : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overline{OA} \cdot \overline{OD'}$ (n° 172) et $\overline{OD'} = \overline{OB'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'}$ (relation de Chasles).

Donc : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overline{OA}(\overline{OB'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'}) = \overline{OA} \cdot \overline{OB'} + \overline{OA} \cdot \overline{B'C'} + \overline{OA} \cdot \overline{C'D'}$
et (n° 172) : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CD}$

soit : $$\boxed{\vec{U} \cdot (\vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{U} \cdot \vec{V_1} + \vec{U} \cdot \vec{V_2} + \vec{U} \cdot \vec{V_3}}.$$

On en déduit que :

$$(\vec{U_1} + \vec{U_2}) \cdot (\vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{U_1} \cdot (\vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}) + \vec{U_2} \cdot (\vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3})$$
$$= \vec{U_1} \cdot \vec{V_1} + \vec{U_1} \cdot \vec{V_2} + \vec{U_1} \cdot \vec{V_3} + \vec{U_2} \cdot \vec{V_1} + \vec{U_2} \cdot \vec{V_2} + \vec{U_2} \cdot \vec{V_3}.$$

Et plus généralement, compte tenu du paragraphe précédent :

$$\boxed{(\Sigma\, m_i\vec{U_i}) \cdot (\Sigma\, n_j\vec{V_j}) = \Sigma\,\Sigma\, m_i n_j \vec{U_i} \cdot \vec{V_j}}.$$

177. Résumé. — Les règles du calcul algébrique relatives au produit de deux sommes s'appliquent donc aux produits scalaires. Par exemple :

Carré scalaire d'une somme de vecteurs : $(\vec{U} + \vec{V})^2 = \vec{U}^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{V}^2$

Carré scalaire d'une différence de vecteurs : $(\vec{U} - \vec{V})^2 = \vec{U}^2 - 2\vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{V}^2$.

Produit scalaire d'une somme de deux vecteurs par leur différence

$$(\vec{U} + \vec{V}) \cdot (\vec{U} - \vec{V}) = \vec{U}^2 - \vec{V}^2.$$

178. Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs coplanaires.

Considérons un repère orthonormé xOy (fig. 93). Les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ des axes $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ ont pour module commun 1 et sont rectangulaires. Donc (n° 171) :

$$\vec{i}^2 = 1; \quad \vec{j}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i}\,.\,\vec{j} = 0.$$

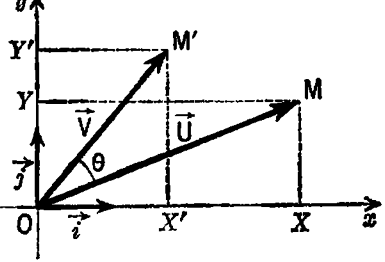


Fig. 93.

Soient X,Y et X',Y' les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OM} = \vec{U}$ et $\overrightarrow{OM'} = \vec{V}$ du plan xOy, dans le repère considéré. On sait que :

$$\vec{U} = X\vec{i} + Y\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{V} = X'\vec{i} + Y'\vec{j}.$$

Donc (n° 176) :

$$\vec{U}\,.\,\vec{V} = XX'\vec{i}^2 + (XY' + YX')(\vec{i}\,.\,\vec{j}) + YY'\vec{j}^2.$$

Soit :

$$\boxed{\vec{U}\,.\,\vec{V} = XX' + YY'}\,.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal à la somme des produits des composantes de même nom de ces deux vecteurs.

En particulier : $\vec{U}^2 = X^2 + Y^2 = u^2$ soit : $u = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

179. Condition d'orthogonalité de deux vecteurs du plan.

Pour que les vecteurs non nuls $\vec{U}$ (X,Y) et $\vec{V}$ (X',Y') soient orthogonaux, il faut et il suffit que $\cos\theta = 0$, donc que leur produit scalaire soit nul :

$$\boxed{XX' + YY' = 0}\,.$$

180. Relations métriques du triangle rectangle.

Soit le triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH (fig. 94).

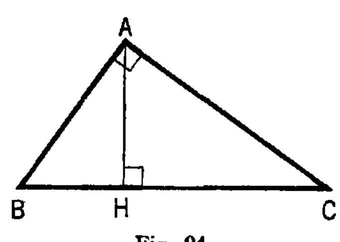


Fig. 94.

1° $\overrightarrow{BA}^2 = \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BH}$ (n° 4)

soit : $\overline{AB}^2 = \overline{BC}\,.\,\overline{BH}.$ (1)

De même : $\overline{AC}^2 = \overline{BC}\,.\,\overline{HC}.$ (2)

2° En additionnant les relations (1) et (2) on trouve :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2. \quad (3)$$

C'est la relation de Pythagore que l'on peut obtenir directement car :

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}^2) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{AC} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2.$$

3° $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$ (n° 171). Or (n° 176) :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB})\,.\,(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overline{AH}^2 + \overline{HB}\,.\,\overline{HC} = 0$$

soit : $\overline{AH}^2 = -\,\overline{HB}\,.\,\overline{HC}.$ (4)

Des relations (1), (2) et (4) on déduit :

$$AB\,.\,AC = BC\,.\,AH.$$

181. Puissance d'un point par rapport à un cercle. — Soit un cercle de centre O, de rayon R, un point fixe M de son plan tel que OM = d et un diamètre variable AA′ (fig. 95). La droite MA recoupe le cercle en B tel que l'angle ABA′ soit droit et (nº 172) :

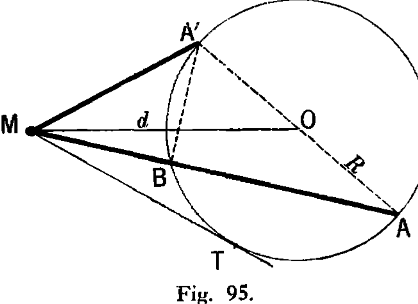


Fig. 95.

$$\overline{\text{MA}}\cdot\overline{\text{MB}} = \overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{MA}'} = (\overrightarrow{\text{MO}} + \overrightarrow{\text{OA}})(\overrightarrow{\text{MO}} - \overrightarrow{\text{OA}'}).$$

$$\text{Soit : } \overline{\text{MA}}\cdot\overline{\text{MB}} = \overrightarrow{\text{MO}}^2 - \overrightarrow{\text{OA}}^2 = d^2 - \text{R}^2.$$

Le produit $\overline{\text{MA}}.\overline{\text{MB}}$ est indépendant de la sécante MAB au cercle. C'est la *puissance* du point M par rapport au cercle donné.

Si M est extérieur au cercle, on voit lorsque A et B viennent se confondre en T, point de contact de la tangente MT, que $\overline{\text{MT}}^2 = \overline{\text{MA}}.\overline{\text{MB}}$.

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE

182. Rappel. — Soit un triangle ABC, rectangle en A, de côtés BC = a, CA = b, AB = c (fig. 95). Rappelons les formules :

$$b = a \sin \text{B} = a \cos \text{C} = c \operatorname{tg} \text{B} = c \operatorname{cotg} \text{C}$$
$$c = a \sin \text{C} = a \cos \text{B} = b \operatorname{tg} \text{C} = b \operatorname{cotg} \text{B}.$$

183. Théorème. — ***Le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés diminuée du double produit de ces deux côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent :***

En effet : $\overrightarrow{\text{BC}} = \overrightarrow{\text{AC}} - \overrightarrow{\text{AB}}$ (fig. 97) et (nº 171) :

$$\overrightarrow{\text{BC}}^2 = \overrightarrow{\text{BC}}^2 = (\overrightarrow{\text{AC}} - \overrightarrow{\text{AB}})^2 = \overrightarrow{\text{AB}}^2 + \overrightarrow{\text{AC}}^2 - 2\overrightarrow{\text{AB}}\,.\,\overrightarrow{\text{AC}} \text{ (nº 176).}$$

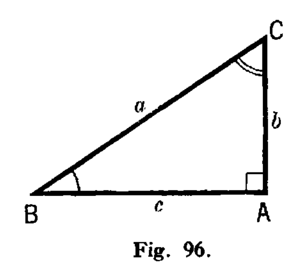
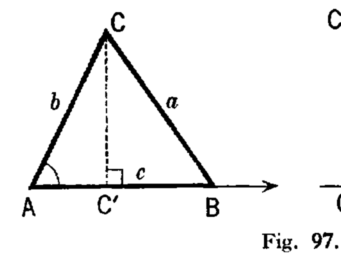


Fig. 96.



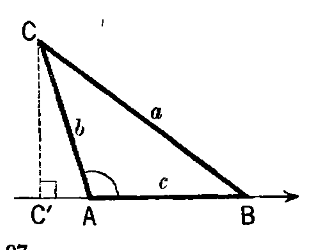


Fig. 97.

En posant : BC = a; AC = b, AB = c et $\widehat{\text{BAC}}$ = A, on obtient :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \text{A}.$$

Soit en remplaçant A par B, B par C, C par A ainsi que a par b, b par c et c par a :

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \text{A} \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \text{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \text{C} \end{aligned}} \cdot \qquad (1)$$

Notons que A = 1 droit $\Longleftrightarrow$ cos A = 0. On retrouve le théorème de Pythagore.

184. — Calcul de cos A, sin A et tg A en fonction des côtés. — 1° Les formules précédentes permettent de calculer cos A, cos B et cos C en fonction des côtés.

On obtient : $2\,bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$

Donc :
$$\boxed{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}. \qquad (1)$$

Le signe de cos A est celui de $b^2 + c^2 - a^2$. L'angle A est donc aigu, droit ou obtus suivant que l'expression $b^2 + c^2 - a^2$ est positive, nulle ou négative.

2° D'après la relation : $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ on obtient :

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}.$$

Et en appliquant l'identité : $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$:

$$\sin^2 A = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2c^2} = \frac{[(b + c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b - c)^2]}{4b^2c^2}.$$

Soit : $$\sin^2 A = \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}{4b^2c^2}.$$

En désignant par p le demi-périmètre du triangle, on obtient : $a + b + c = 2p$; $b + c - a = 2(p - a)$; $c + a - b = 2(p - b)$ et $a + b - c = 2(p - c)$.

Et : $$\sin^2 A = \frac{16\,p(p - a)(p - b)(p - c)}{4b^2c^2}.$$ Or $\sin A > 0$.

Donc :
$$\boxed{\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}. \qquad (2)$$

Afin de simplifier cette formule on pose : $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$. D'où :

$$\sin A = \frac{2S}{bc}; \quad \sin B = \frac{2S}{ca} \quad \text{et} \quad \sin C = \frac{2S}{ab}. \qquad (2')$$

3° On en déduit alors : $\operatorname{tg} A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{2S}{bc} \times \dfrac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2}$.

Soit :
$$\boxed{\operatorname{tg} A = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2}}. \qquad (3)$$

185. Aire du triangle. — D'après les formules (2') on obtient (fig. 97) :

$$S = \frac{1}{2}\,bc \sin A = \frac{1}{2}\,AB\,.\,AC \sin A = \frac{1}{2}\,AB\,.\,CC' = \text{aire (ABC)}.$$

L'aire du triangle ABC de côtés a, b, c est donc :

$$\boxed{S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}. \qquad (4)$$

186. Calcul des hauteurs en fonction des côtés. — Les formules connues :

$$S = \frac{1}{2}\,ah_a = \frac{1}{2}\,bh_b = \frac{1}{2}\,ch_c$$

entraînent : $$h_a = \frac{2S}{a}; \quad h_b = \frac{2S}{b} \quad \text{et} \quad h_c = \frac{2S}{c}. \qquad (5)$$

Les hauteurs d'un triangle quelconque sont inversement proportionnelles aux côtés correspondants.

On a en effet : $$ah_a = bh_b = ch_c = 2\,S.$$

187. Théorème. — ***Dans tout triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.***

En effet les formules (2′) du n° 184 permettent d'écrire les rapports égaux :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S}.$$

La formule $2\,S = ah_a$ et la relation connue : $bc = 2\,R.h_a$ où R désigne le rayon du cercle ABC montrent que :

$$\frac{abc}{2S} = \frac{a\,.\,2R\,.\,h_a}{a\,.\,h_a} = 2R.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}. \qquad (6)$$

On en déduit que par exemple : $a = 2\,R \sin A$.

188. Calcul du rayon du cercle circonscrit. — Le calcul précédent montre que :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{abc}{2S} = 2R \implies abc = 4RS \iff \boxed{R = \frac{abc}{4S}}. \qquad (7)$$

189. Résolution d'un triangle quelconque. — Les théorèmes des nos 183 et 187 joints à la relation : $A + B + C = 180°$ permettent de calculer les éléments inconnus d'un triangle lorsqu'on donne trois éléments de ce triangle dont au moins un côté.

190. Exemple I. — *Dans un triangle* ABC *on donne* $a = 137{,}5$, $B = 83°$ et $C = 57°$. *Calculer* A, b et c.

On a d'abord : $A = 180° - (B + C) = 180° - 140°$. Soit : $\boxed{A = 40°}$.

Puis : $$2R = \frac{a}{\sin A} = a \times \frac{1}{\sin 40°} = 137{,}5 \times 1{,}556 = 213{,}95$$

$b = 2R \sin B = 2R \sin 83° = 213{,}95 \times 0{,}9925.$ Soit : $\boxed{b = 212{,}35}$

$c = 2R \sin C = 2R \sin 57° = 213{,}95 \times 0{,}8387.$ Soit : $\boxed{c = 179{,}44}$.

191. Exemple II. — *Résoudre un triangle* ABC *connaissant* $A = 36°$, $b = 85$ et $c = 54$.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A = 7\,225 + 2\,916 - 2 \times 85 \times 54 \times 0{,}8090 = 2\,714{,}38.$

Donc : $a = \sqrt{2\,714{,}38}$ Soit : $\boxed{a = 52{,}1}$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2\,714{,}38 + 2\,916 - 7\,225}{2 \times 52{,}1 \times 54} = -0{,}2834.$$

Donc : $180° - B = 73°\,31'$ et $\boxed{B = 106°\,29'}$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2\,714{,}38 + 7\,225 - 2\,916}{2 \times 52{,}1 \times 85} = 0{,}7930.$$

Donc : $\boxed{C = 37°\,31'}$.

On vérifie que : $A + B + C = 36° + 106°\,29' + 37°\,31' = 180°$.

EXERCICES

— Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, de modules u et v, faisant l'angle θ, dans les cas suivants :

645. $u = 5;\quad v = 7;\quad \theta = 30^\circ$.

646. $u = 12;\quad v = 18;\quad \theta = 60^\circ$.

647. $u = \dfrac{\sqrt{15}}{4};\quad v = \dfrac{7}{2};\quad \theta = 120^\circ$.

648. $u = \sqrt{5};\quad v = \dfrac{2}{3};\quad \theta = 150^\circ$.

649. $u = 5\sqrt{2};\quad v = 2\sqrt{2};\quad \theta = 45^\circ$.

650. $u = 17;\quad v = 7\sqrt{2};\quad \theta = 135^\circ$.

— Dans une base orthonormée xOy, on donne deux vecteurs $\vec{U}$ (X, Y) et $\vec{V}$ (X′, Y′). Calculer leur produit scalaire dans les cas suivants :

651. $\vec{U}(-5;\ 3)$ et $\vec{V}(6;\ 10)$.

652. $\vec{U}(0;\ 2)$ et $\vec{V}(-\sqrt{3};\ 1)$.

653. $\vec{U}(2;\ \sqrt{4})$ et $\vec{V}\left(-\dfrac{5}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

654. $\vec{U}(2;\ 4)$ et $\vec{V}(-3\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$.

655. $\vec{U}(a;\ b)$ et $\vec{V}(-mb,\ ma)$.

656. $\vec{U}(3;\ 4)$ et $\vec{V}(5;\ 13)$.

657. On donne un angle xOy et on désigne par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy.

1° Construire les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2° Quelle propriété des bissectrices d'un angle vérifie-t-on ainsi ?

658. Soient dans un plan deux points fixes A et B et un point variable M. On désigne par O le milieu de AB et on pose AB $= 2a$.

1° Montrer que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overline{OM}^2 - a^2$.

2° Trouver le lieu du point M lorsque $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$, où k désigne une constante donnée. Étudier le cas particulier où $k = 0$.

659. Soient dans un plan deux points fixes A et B et un point variable M.

1° On construit les points C et D tels que : $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = 0$ et $\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} = 0$. Montrer que : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD}$.

2° Trouver le lieu du point M lorsque, k désignant une constante donnée :

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = k.$$

660. Dans un repère xOy orthonormé, on donne les points A et B de coordonnées respectives (2; 5) et (4; — 7). On désigne par I le milieu de AB.

1° Pour qu'un point M (xy) appartienne à la médiatrice de AB, il faut et il suffit que : $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

2° En déduire la relation qui lie les coordonnées x et y de tout point M de la médiatrice de AB.

661. Dans un repère orthonormé xOy, on donne les points A(3; 8) et B(2; — 3).

1° Pour qu'un point M appartienne au cercle du diamètre AB, il faut et il suffit que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

2° En déduire la relation qui lie les coordonnées de tout point M du cercle de diamètre AB.

662. Dans un repère orthonormé xOy, on donne les points A (0; 3), B (5; 2) et C (— 3, 7).

1° Pour qu'un point M appartienne à la hauteur issue de A dans le triangle ABC, il faut et il suffit que : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

2° En déduire la relation que lie les coordonnées d'un point quelconque de cette hauteur.

3° Même question pour les hauteurs issues de B et C.

663. On donne dans un plan le cercle de centre O, de rayon R et le point A tel que OA = d.

1° Le lieu des points M du plan tels que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = R^2$ est une droite Δ perpendiculaire en H au diamètre OA.

2° Discuter suivant les valeurs de d la position de la droite Δ par rapport au cercle donné.

3° Dans le cas où la droite Δ coupe le cercle, que peut-on dire de leurs points d'intersection ?

664. Deux droites $x'x$ et $y'y$ se coupent en O. On considère deux points A et C sur $x'x$ et deux points B et D sur $y'y$.

1° Montrer que : $$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OC}} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OD}} \iff \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}. \qquad (1)$$

2° Soient A′ et C′ les projections orthogonales de A et C sur $y'y$. B′ et D′ celles de B et D sur $x'x$. Si l'une des relations (1) est vérifiée, que peut-on dire des droites AB et CD et des quadrilatères A′B′CD et ABC′D′ ?

665. On donne un triangle ABC dont l'angle A est aigu. Dans le plan de ce triangle, on construit le segment AD égal à AB et perpendiculaire à AB (D et B du même côté de AC) puis le segment AE égal et perpendiculaire à AC (E et C du même côté de AB).

1° Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$.

2° Évaluer le produit scalaire $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BE}$ et en déduire que les segments BE et CD sont perpendiculaires et égaux.

3° Soit M le milieu de DE. Démontrer les égalités : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

4° Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$. Que peut-on dire des directions des droites AM et BC ?

666. Soit H l'orthocentre du triangle ABC et A′, B′, C′ les pieds des hauteurs.

1° De l'égalité : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$, déduire que : $\overline{A'A}.\overline{A'H} = -\overline{A'B}.\overline{A'C}$.

2° Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$ et montrer que :
$$\overline{AH}.\overline{AA'} = \overline{AB}.\overline{AC'} = \overline{AC}.\overline{AB'}.$$

3° Démontrer que : $\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}.\overline{HB'} = \overline{HC}.\overline{HC'}$.

667. On considère un quadrilatère plan ou gauche ABCD.

1° Démontrer la relation : $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AD}^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.

2° En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les diagonales AC et DB du quadrilatère soient orthogonales.

668. 1° Dans tout tétraèdre ABCD montrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

2° En déduire que si dans un tétraèdre deux couples d'arêtes opposées sont orthogonales, il en est de même du troisième.

3° Montrer que les hauteurs d'un tel tétraèdre sont concourantes.

669. On considère un plan P, un point O de ce plan et deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Les points A et B se projettent orthogonalement en A′ et B′ sur le plan P.

1° Pour que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB'}$, il faut et il suffit que l'un au moins des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{OB}$ appartienne au plan P.

2° En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la projection orthogonale d'un angle droit sur un plan soit un angle droit.

670. On donne un axe Δ, un point O de cet axe et deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Les points A et B se projettent orthogonalement en A′ et B′ sur l'axe Δ.

1° Pour que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB'}$, il faut et il suffit que $\overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{B'B} = 0$.

2° En déduire qu'étant donné un dièdre droit, pour qu'un plan coupe de dièdre suivant un angle droit, il faut et il suffit qu'il coupe une des faces du dièdre suivant une perpendiculaire à l'arête de ce dièdre.

671. On considère trois demi-droites Ox, Oy, Oz perpendiculaires deux à deux et de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$. On désigne par OX, OY, OZ les bissectrices intérieures des angles yOz, zOx et xOy et par $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ les vecteurs unitaires respectifs des axes OX, OY et OZ.

1° Démontrer les relations : $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k})$; $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{k} + \vec{i})$; $\vec{w} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$.

2° Calculer les produits scalaires $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$ et $\vec{w}\cdot\vec{u}$. Qu'en déduit-on pour les angles que forment deux à deux les axes OX, OY et OZ ?

672. Soit un triangle ABC de côtés a, b, c. On désigne par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs unitaires des axes $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et on construit les vecteurs :

$$\overrightarrow{AI} = \vec{i} + \vec{j} \quad \overrightarrow{AP} = c\vec{i} + b\vec{j}; \quad \overrightarrow{AQ} = b\vec{i} + c\vec{j}.$$

1° Évaluer en fonction de a, b et c les modules de ces vecteurs puis calculer le produit scalaire de ces vecteurs associés deux à deux.

2° Calculer le cosinus de l'angle de deux quelconques de ces vecteurs. Que remarque-t-on ?

— *Démontrer que dans tout triangle* ABC *les formules suivantes se réduisent à des identités lorsqu'on exprime les variables en fonction de a, b et c.*

673. $a = b \cos C + c \cos B$.

674. $h_a = 2 R \sin B \sin C$.

675. $b^2 - c^2 = a (b \cos C - c \cos B)$.

676. $(b^2 - c^2) \cos A = a (c \cos C - b \cos B)$.

677. $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$.

678. $a^2 + b^2 + c^2 = 2 \Sigma bc \cos A$.

679. $\cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C$.

680. $\sin A = (\text{tg } B + \text{tg } C) \cos B \cos C$.

681. $a + b + c = \Sigma (b + c) \cos A$.

682. $\Sigma \text{ tg } A = \text{tg } A \text{ tg } B \text{ tg } C$.

683. $\Sigma (b^2 - c^2) \text{ cotg } A = 0$.

684. $a = h_a (\text{cotg } B + \text{cotg } C)$.

685. $\Sigma \sin A \cos A = 2 \sin A \sin B \sin C$.

686. $\Sigma a \cos A = 4 R \sin A \sin B \sin C$.

687. Dans un triangle ABC on a : $b + c = 2a$. Démontrer les relations :

$$2 \sin A = \sin B + \sin C \quad \text{et} \quad \frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}. \quad \text{Réciproques ?}$$

688. Reprendre l'exercice précédent pour $bc = a^2$ et les relations :

$$\sin^2 A = \sin B \sin C \quad \text{et} \quad h_a^2 = h_b h_c$$

689. Démontrer que si dans un triangle ABC le côté a est double de la hauteur h, on a la relation :

$$\text{cotg } B + \text{cotg } C = 2. \quad \text{Réciproque ?}$$

690. Les côtés d'un triangle ABC vérifient les relations :

$$a = x^2 - xy + y^2 \qquad b = x^2 - y^2 \qquad c = x^2 - 2xy.$$

Calculer la valeur de l'angle A.

691. Démontrer que dans un triangle ABC, la médiane AM $= m_a$ vérifie la relation :

$$4 m_a^2 = b^2 + c^2 + 2 bc \cos A.$$

2° Calculer AM sachant que A = 72° 38′, $b = 142$ et $c = 95$.

— Calculer les hauteurs et le rayon R du cercle circonscrit dans un triangle dont les côtés ont pour longueurs :

692. 36, 29 et 25.

693. 40, 37 et 13.

694. 73, 69 et 50.

695. 92, 85 et 39.

696. 123, 106 et 65.

697. 236, 183 et 65.

698. 141, 100 et 53.

699. 184, 165 et 157.

700. 273, 260 et 169.

— Résoudre le triangle ABC connaissant :

701. $a = 41$; B = 67° et C = 42°.

702. $a = 48$; B = 83gr et C = 61gr.

703. A = 57 ; B = 108° et C = 32°.

704. $a = 144$; B = 120gr et C = 32gr.

705. A = 60° ; $a = 55$ et $b = 43$.

706. A = 38gr ; $a = 47$ et $b = 54$ (2 sol.).

707. A = 76° ; $b = 48$ et $c = 40$.

708. A = 84gr ; $b = 96$ et $c = 31$.

709. $a = 64$; $b = 55$ et $c = 40$.

710. $a = 132$; $b = 90$ et $c = 53$.

711. Calculer la hauteur h_a, le rayon R et sin A, sin B et sin C dans un triangle ABC dont les côtés ont pour valeurs :

$$a = (x + y)(xy - 1), \quad b = x(1 + y^2) \quad \text{et} \quad c = y(1 + x^2).$$

712. On considère un triangle ABC dans lequel B > C. Le cercle de centre A passant par B coupe le côté CA en D et son prolongement en E. Par D on mène la parallèle à BE qui coupe BC en F.

1° Montrer que $BD = BE \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ et $DF = BD \operatorname{tg} \frac{B - C}{2}$.

2° En déduire que : $\operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$.

3° Utiliser la formule précédente pour calculer B — C et achever la résolution du triangle sachant que : $A = 71°32'$; $b = 67$; $c = 47$.

713. Soient r et r_a les rayons des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A du triangle ABC.

1° Montrer que : $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a} = \frac{r_a}{p}$ et $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p - b} = \frac{p - c}{r_a}$.

2° En déduire que : $\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}$ et les formules analogues.

3° Utiliser ces formules pour calculer les angles du triangle sachant que :

$$a = 57; \quad b = 50 \text{ et } c = 43.$$

714. Soit un quadrilatère inscrit dans un cercle de rayon R. On pose :

$$AB = a, \; BC = b, \; CD = c, \; DA = d, \; AC = x \text{ et } BD = y.$$

1° Montrer que : $x^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos B = c^2 + d^2 + 2\,cd \cos B$.

2° En déduire cos B et x et par permutation cos A et y, et démontrer les formules de Ptolémée :

$$xy = ac + bd \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

3° Calculer x, y, A, B et le rayon R sachant que : $a = 31$, $b = 24$, $c = 12$ et $d = 23$.

ARCS ET ANGLES

192. Arc géométrique. — Deux points A et B d'un cercle O (fig. 98) définissent deux arcs AB d'extrémités A et B, l'un inférieur, l'autre supérieur à une demi-circonférence. Les demi-droites OA et OB déterminent deux angles en centre, l'un saillant, l'autre rentrant. Chacun d'eux est l'angle au centre correspondant à l'arc AB qu'il intercepte. On sait que les arcs et les angles sont des grandeurs mesurables et que :

Un arc de cercle et l'angle au centre correspondant sont mesurés par le même nombre, à condition d'adopter pour unité d'angle l'angle au centre qui intercepte l'unité d'arc.

193. Unités d'arc et d'angle. — L'unité d'arc est le **quadrant** (le quart du cercle); l'unité d'angle correspondante est l'**angle droit** (1^D). On emploie plutôt :

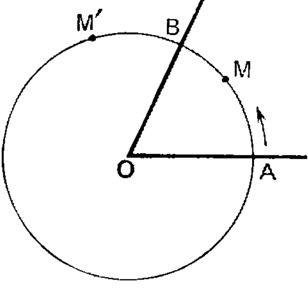


Fig. 98.

1° **Le degré** (°) : $\frac{1}{90}$ du quadrant pour les arcs; $\frac{1}{90}$ de l'angle droit pour les angles. Le degré se divise en 60 minutes (′); la minute en 60 secondes (″).

2° **Le grade** (gr) : $\frac{1}{100}$ partie du quadrant pour les arcs; $\frac{1}{100}$ partie de l'angle droit pour les angles. Les sous-multiples du grade sont décimaux : décigrade, centigrade, etc.

3° **Le radian** (*rd*) : ***arc de cercle dont la longueur est égale au rayon du cercle.*** L'angle au centre correspondant se nomme aussi *radian* (rd).

Le périmètre d'un cercle de rayon R valant $2\pi R$, il en résulte que le cercle entier vaut 2π radians :

$$360^\circ = 400 \text{ gr} = 2\pi \text{ rd} \iff \boxed{180^\circ = 200 \text{ gr} = \pi \text{ rd}}$$

Les mesures d, g, α d'un même arc en degrés, grades et radians vérifient donc :

$$\boxed{\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{\alpha}{\pi}}$$

formules qui permettent le passage d'une unité à une autre. Les formules de dérivation (16ᵉ leçon) étant plus simples en radians, c'est cette unité que nous utiliserons dorénavant à moins d'indication contraire. Il est bon de savoir que :

$$90^o = \frac{\pi}{2}\text{ rd} \quad ; \quad 45^o = \frac{\pi}{4}\text{ rd} \quad ; \quad 60^o = \frac{\pi}{3}\text{ rd} \quad ; \quad 30^o = \frac{\pi}{6}\text{ rd.}$$

194. Extension de la notion d'arc. — La notion d'arc peut être généralisée par la considération d'arcs orientés et par celle d'arcs dont la longueur dépasse celle du cercle.

Imaginons qu'un mobile M se déplace *constamment dans le même sens* sur la circonférence du cercle O (fig. 98). Ce mouvement peut s'opérer soit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ou *sens direct*, soit dans le sens des aiguilles d'une montre ou *sens rétrograde*. En trigonométrie, on adopte pour *sens positif* ou *sens trigonométrique* le sens direct et pour sens *négatif* le sens rétrograde. On dit alors que le cercle O est orienté :

Un cercle est orienté lorsqu'on adopte sur sa circonférence un sens de parcours pasitif.

Soient deux points A et B *pris dans cet ordre* sur le cercle O. Imaginons que le mobile M partant de A se déplace *constamment dans le même sens* sur le cercle et arrive en B. Nous dirons que M a parcouru un arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ d'origine A et d'extrémité B.

Il existe une infinité d'arcs $\overset{\frown}{AB}$: la connaissance de l'origine A et de l'extrémité B ne définit pas parfaitement cet arc; il faut connaître en outre le *sens* de parcours du mobile M et le *nombre de tours* complets qu'il effectue sur le cercle avant de s'arrêter en B. Dans ces conditions :

La mesure algébrique d'un arc orienté AB ***est un nombre dont la valeur absolue est la mesure de l'arc géométrique*** AB ***(qui peut être supérieure à celle du cercle) et dont le signe est + ou − selon que l'arc est décrit dans le sens positif adopté sur le cercle ou en sens inverse.***

Un arc est parfaitement déterminé par son origine et sa mesure algébrique; par exemple si $\overset{\frown}{AB} = -420^o, = -360^o - 60^o$, M décrit un tour complet dans le sens négatif, puis, toujours dans le même sens, un arc AB de 60°.

195. Théorème. — ***Pour que deux arcs de même origine aient même extrémité, il faut et il suffit que la différence de leurs mesures algébriques soit un nombre entier de circonférences.***

1° Soit a la valeur en radians du *plus petit arc positif* $\overset{\frown}{AB}$ (fig. 98).

Lorsque M se déplace dans le sens positif de A à B , les valeurs successives des arcs AB ainsi obtenus sont :

$$a; \quad a + 2\pi; \quad a + 4\pi; ... \quad a + 2m\pi \qquad (m \text{ entier positif}).$$

Lorsque M se déplace dans le sens négatif de A à B, le premier arc obtenu a pour valeur absolue $2\pi - a$ et pour valeur algébrique $a - 2\pi$; les suivants vaudront :

$$a - 4\pi; \quad a - 6\pi; ... \quad a - 2n\pi \qquad (n \text{ entier positif}).$$

Ainsi, tous les arcs $\overset{\frown}{AB}$ sont donnés par la *formule unique :* $\overset{\frown}{AB} = a + 2k\pi$ où k est un entier positif, nul ou négatif.

Ceci étant, soient α et β les mesures en radians de deux arcs $\overset{\frown}{AB}$, on aura :

$$\alpha = a + 2k'\pi; \qquad \beta = a + 2k''\pi$$

donc : $\beta - \alpha = 2(k'' - k')\pi = 2k\pi$ (k entier positif nul ou négatif), ce qui établit la condition nécessaire.

2° *Réciproquement*, soient deux arcs α et β, d'origine A, tels que : $\beta - \alpha = 2k\pi$.

Si B est l'extrémité de l'arc α, en désignant par a le plus petit arc positif $\overset{\frown}{AB}$, il existe une valeur positive ou négative de l'entier k' telle que $\alpha = a + 2k'\pi$; on a alors :

$$\beta = \alpha + 2k\pi = a + 2(k' + k)\pi = a + 2k''\pi.$$

k'' étant entier, β est donc la mesure algébrique d'un arc d'origine A et d'extrémité B.

En définitive, si α est la mesure d'un arc $\overset{\frown}{AB}$, tous les autres sont donnés par la formule :

$$\boxed{\beta = \alpha + 2k\pi} \qquad k \text{ entier positif ou négatif.}$$

Exemple : deux arcs de même origine et de valeurs $\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ ont même extrémité.

196. Remarques. — 1° Le nombre α ($-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$) qui mesure l'un des arcs $\overset{\frown}{AB}$ se nomme **détermination principale** de cet arc.

2° Si un des arcs $\overset{\frown}{AB}$ a pour mesure α, l'un des arcs $\overset{\frown}{BA}$ a pour mesure $-\alpha$ et tous les arcs $\overset{\frown}{BA}$ sont donnés par la formule : $\overset{\frown}{BA} = -\alpha + 2k\pi$.

3° Si A est choisi comme *origine des arcs* sur le cercle orienté O, la position du point B sur le cercle est déterminée par la valeur d'un arc $\overset{\frown}{AB}$ qu'on appelle alors **abscisse curviligne** du point B. Il est clair que la valeur de cette abscisse curviligne détermine B, mais qu'inversement correspondent au point B une infinité d'abscisses curvilignes telles que deux d'entre elles diffèrent d'un nombre entier de circonférences.

197. Relation de Chasles. — ***Soient trois points*** **A, B, C** ***d'un cercle orienté. On a :*** $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = 2k\pi$ ***(k entier positif, négatif ou nul).***

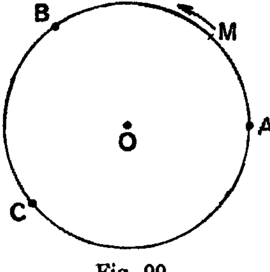


Fig. 99.

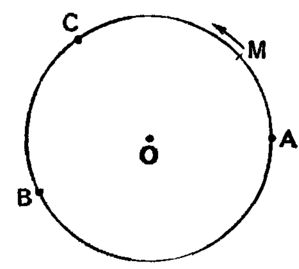


Fig. 100.

On part de A dans le sens positif : deux cas se présentent selon que l'on rencontre pour la première fois les deux autres points dans l'ordre BC ou dans l'ordre CB. Soient a, b, c les plus petits arcs positifs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$.

Dans le premier cas (fig. 99) : $a + b + c = 2\pi$.

Or : $\overset{\frown}{AB} = a + 2h\pi$; $\overset{\frown}{BC} = b + 2h'\pi$; $\overset{\frown}{CA} = c + 2h''\pi$;

h, h', h'' désignant des entiers positifs ou négatifs. Donc :

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = 2\pi(h + h' + h'' + 1) = 2k\pi.$$

Dans le second cas (fig. 100) : $a + b + c = 4\pi$

et $$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = 2\pi(h + h' + h'' + 2) = 2k\pi.$$

Donc dans les deux cas :

$$\boxed{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = 2k\pi.}$$

Cette relation peut aussi s'écrire : $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = -\overset{\frown}{CA} + 2k\pi$

soit $$\boxed{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC} + 2k\pi}$$

forme qui rappelle la première relation de Chasles relative à trois points d'un axe orienté.

198. Corollaire. — ***La valeur d'un arc est égale à $2k\pi$ près à l'abscisse curviligne de son extrémité diminuée de celle de son origine.***

Soient M et M' deux points d'un cercle O où A désigne l'origine des abscisses curvilignes (fig. 98). On a :

$$\overset{\frown}{MM'} + \overset{\frown}{M'A} + \overset{\frown}{AM} = 2k\pi$$

soit $$\overset{\frown}{MM'} = -\overset{\frown}{M'A} - \overset{\frown}{AM} + 2k\pi$$

et $$\boxed{\overset{\frown}{MM'} = \overset{\frown}{AM'} - \overset{\frown}{AM} + 2k\pi}$$

k entier positif, négatif ou nul.

199. Extension de la notion d'angle. — Soit une demi-droite Oz d'un plan P (fig. 101). Elle peut, à partir d'une position initiale Ox de ce plan, tourner dans deux sens différents. Nous adopterons comme **sens positif de rotation** celui qui, pour un observateur placé debout sur P, coïncide avec le *sens inverse des aiguilles d'une montre*. Tout point M de Oz décrit alors un cercle orienté dans les conditions du nº 194.

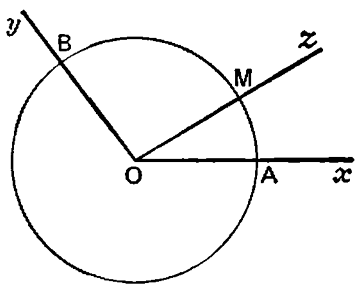


Fig. 101.

Imaginons qu'en tournant *constamment dans le même sens*, Oz vienne de Ox en Oy. Nous dirons que Oz a décrit un **angle orienté** de côté origine Ox, de *côté extrémité* Oy; nous le symboliserons par la notation $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$.

Dans ces conditions M aura parcouru un *arc orienté* $\overset{\frown}{AB}$ du cercle O et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ sera l'angle au centre *correspondant* à cet arc $\overset{\frown}{AB}$.

De même que pour les arcs, il existe une infinité d'angles $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$. Pour déterminer l'un d'entre eux il faut connaître, outre le côté origine et le côté extrémité, le *sens* dans lequel a tourné Oz et le nombre de tours complets parcourus par Oz avant de parvenir en Oy. Mais il est clair que la connaissance de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ parcouru par M entraîne celle de $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$.

La mesure algébrique d'un angle orienté $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ est un nombre dont la valeur absolue est la mesure de l'angle géométrique xOy (qui peut être supérieure à 4 droits) et dont le signe est + ou — selon que l'angle est décrit dans le sens positif de rotation ou en sens inverse.

Grâce au conventions adoptées, la valeur absolue et le signe de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et de l'angle au centre correspondant $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ sont identiques. Le résultat du n° 192 reste donc valable pour les angles et les arcs orientés.

200. Conséquences. — On peut donc étendre aux angles orientés les résultats obtenus pour les arcs :

1° Si α est la mesure en radians d'un angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$, tous les autres sont donnés par la relation : $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \alpha + 2k\pi$.

2° Soient trois demi-droites concourantes, Ox, Oy, Oz; la relation de Chasles (n° 197) étendue aux angles donne :

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}) + (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{Ox}) = 2k\pi$$

ou encore
$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}) + 2k\pi.$$

3° On peut repérer la position d'une demi-droite Oz par l'un des angles $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$ qu'elle forme avec la demi-droite origine Ox que nous appellerons axe polaire. L'un des angles $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$ est alors l'angle polaire de Oz et la relation (n° 198) étendue aux angles donne :

$$(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}) - (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + 2k\pi \quad \text{soit :}$$

La valeur algébrique d'un angle orienté est égale à l'angle polaire du côté extrémité diminué de l'angle polaire du côté origine.

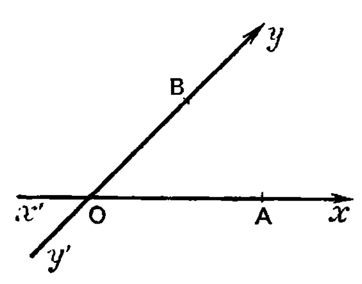


Fig. 102.

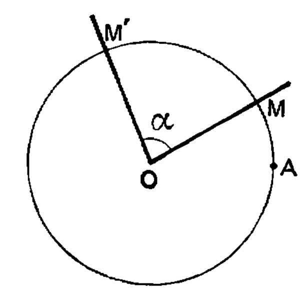


Fig. 103.

201. Angle orienté de deux vecteurs. — ***L'angle orienté de deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ pris dans cet ordre dans un plan orienté, est l'un des angles des demi-droites*** OA ***et*** OB.

Sa valeur algébrique se symbolise par $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Ainsi (fig. 102) :

$$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + 2k\pi.$$

202. Angle de deux axes. — Soient deux axes $x'Ox$, $y'Oy$ (fig. 102) d'un plan orienté. On appelle angle de $x'x$ avec $y'y$, l'un quelconque des angles dont il faut faire tourner l'axe origine $x'x$ pour qu'il coïncide *en direction et en sens* avec l'axe extrémité $y'y$. C'est aussi l'un des angles $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$:

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + 2k\pi.$$

203. Longueur d'un arc. — Soit α la *valeur absolue* en radians de $\widehat{MOM'}$ et de l'arc correspondant MM′ (fig. 103). Un arc de 1 radian a pour longueur R, rayon du cercle; la longueur l d'un arc de α radians est donc :

$$\boxed{l = R\alpha}$$

204. Cercle trigonométrique. — ***On appelle cercle trigométrique un cercle orienté dont le rayon est égal à l'unité.***

Dans ce cas, la formule qui donne la longueur d'un arc devient :

$$\boxed{l = \alpha}$$

La longueur d'un arc du cercle trigonométrique s'exprime par le même nombre que l'angle au centre correspondant mesuré en radians.

EXERCICES

715. Évaluer en grades et en radians les angles de :

15°; 18°; 25°; 37°15′; 127°30′.

716. Évaluer en degrés et en radians les angles dont les mesures en grades sont :

40; 112; 17,5; 212,35; 315,75.

717. Évaluer en degrés et en grades les angles dont les mesures en radians sont :

$\frac{\pi}{18}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{15}$; 2; 5,2.

— Connaissant l'origine A sur le cercle trigonométrique, placer sur ce cercle les extrémités M des arcs $\overset{\frown}{AM}$ donnés par les formules suivantes, où k est un entier positif, négatif ou nul. L'unité d'arc est le radian :

718. $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{2\pi}{5} + k\pi$; $-\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{15} + \frac{k\pi}{2}$;

719. $\frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}$; $\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{7}$; $-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}$.

720. $\pi + \frac{k\pi}{5}$; $\frac{2k\pi}{15}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}$; $-\pi + \frac{2k\pi}{11}$.

721. Soit α la valeur d'un arc d'origine A et d'extrémité M.

1° Quelle est la valeur d'un arc $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ quelconque ?

2° Quelle est la valeur d'un arc $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{2}$? Placer les points P correspondants sur le cercle trigonométrique.

3° Quelle est la valeur d'un arc $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{n}$ où n est un entier donné ? Placer sur le cercle trigonométrique les points Q correspondants.

722. Soient α et β les valeurs de deux arcs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$. Montrer qu'il existe deux extrémités possibles pour les arcs $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}}}{2}$$

Que représentent ces points pour les arcs géométriques MN ?

723. On donne sur le cercle trigonométrique deux points B et C définis par leurs abscisses curvilignes u et v; soit M un point quelconque du cercle d'abscisse curviligne x.

1° Évaluer les valeurs algébriques des arc $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.

2° Déterminer les points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.

3° Plus généralement, déterminer les points M tels que $m\overrightarrow{\mathrm{MB}} = n\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ où m et n sont deux nombres entiers donnés.

724. Dans un cercle O de rayon R, évaluer la longueur de l'arc intercepté AB et l'aire du secteur OAB sachant que $\widehat{\mathrm{AOB}}$ mesure :

35°; 17°30'; 42 gr; $\dfrac{\pi}{5}$.

725. Soient deux droites D_1 et D_2 dans un plan orienté. On désigne par (D_1, D_2) l'un quelconque des angles orientés dont il faut faire tourner D_1 pour l'amener sur D_2.

1° α désignant l'un de ces angles, montrer que tous les autres sont donnés par la relation $(D_1, D_2) = \alpha + k\pi$ (k entier positif ou négatif).

2° Soient trois droites D_1, D_2, D_3 d'un plan orienté. Démontrer la relation :

$$(D_1, D_3) = (D_1\, D_2) + (D_2, D_3) + k\pi.$$

3° Si D_3 est une des bissectrices des angles formés par D_1 et D_2, démontrer la relation :

$$(D_1, D_3) = \frac{\alpha}{2} + k\,\frac{\pi}{2}.$$

FONCTIONS CIRCULAIRES

205. Cosinus et sinus d'un arc. — Considérons le cercle trigonométrique O de la figure 104, où A est l'origine des arcs. Plaçons les points B, A′ et B′ d'abscisses curvilignes $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$. On divise ainsi le cercle en quatre *quadrants*, numérotés, comme l'indique la figure, dans l'ordre croissant, à partir de A dans le sens positif de rotation. Tout point du plan peut être repéré à l'aide de deux axes de coordonnées orthonormées $x'Ox$ et $y'Oy$ dont $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont respectivement deux vecteurs unitaires.

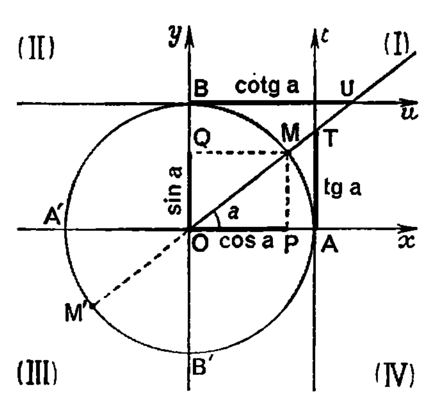


Fig. 104.

$x'Ox$ est l'axe des abscisses ou des cosinus; $y'Oy$ est l'axe des ordonnées ou des sinus.

Soit un arc $\overset{\frown}{AM}$ de valeur algébrique a :

Le cosinus et le sinus de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de son extrémité* M *dans le repère xOy.

On écrit : $\boxed{\cos a = \overline{OP}}$ $\boxed{\sin a = \overline{OQ}}$

cos *a* et **sin *a*** sont donc les mesures algébriques des projections du vecteur unitaire $\overrightarrow{OM}$ sur les axes $x'x$ et $y'y$.

Il résulte de ces définitions que tous les arcs d'origine A et d'extrémité M ont même sinus et même cosinus. Si a augmente de 2π (ou de $2k\pi$) l'extrémité de l'arc reste inchangée, donc aussi le sinus et le cosinus :

$$\cos(a + 2k\pi) = \cos a; \quad \sin(a + 2k\pi) = \sin a.$$

On exprime ce fait en disant que le sinus et le cosinus d'un arc sont des *fonctions périodiques* de cet arc dont la *période* est 2π.

Notons que :

1° A tout arc a correspondent un sinus et un cosinus compris entre -1 et $+1$:

$$-1 \leqslant \sin a \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos a \leqslant 1.$$

2° Le sinus d'un arc a est positif lorsque l'extrémité M de cet arc appartient aux quadrants I ou II. Il est négatif lorsque M appartient aux quadrants III ou IV. D'autre part :

$$\sin k\pi = 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm 1.$$

3° Le cosinus d'un arc a est positif lorsque l'extrémité M de cet arc appartient aux quadrants I ou IV. Il est négatif lorsque M appartient aux quadrants II ou III.

D'autre part : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$; $\quad \cos k\pi = \pm 1.$

206. Tangente et cotangente d'un arc. — Menons en A la tangente At au cercle O orientée dans le même sens que Oy, puis la tangente Bu en B orientée dans le même sens que Ox.

Les axes* At *et* Bu *sont respectivement l'axe des tangentes et l'axe des cotangentes.

Le diamètre passant par l'extrémité M de l'arc a coupe At en T et Bu en U.

On appelle tangente et cotangente de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ ***les mesures algébriques des vecteurs*** $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ ***et*** $\overrightarrow{\mathrm{BU}}$.

On écrit : $\boxed{\operatorname{tg} a = \overline{\mathrm{AT}}}$ et $\boxed{\operatorname{cotg} a = \overline{\mathrm{BU}}}$

Il résulte de ces définitions que si a augmente de π, l'extrémité de l'arc vient en M' diamétralement opposé à M dans le cercle O; les points T et U ne changent pas. Donc

$$\operatorname{tg}(a + \pi) = \operatorname{tg} a; \qquad \operatorname{cotg}(a + \pi) = \operatorname{cotg} a.$$

En général, si a augmente de $k\pi$, l'extrémité de l'arc vient en M si k est pair, en M' si k est impair; la tangente et la cotangente ne changent pas :

$$\operatorname{tg}(a + k\pi) = \operatorname{tg} a; \qquad \operatorname{cotg}(a + k\pi) = \operatorname{cotg} a.$$

On exprime ce fait en disant que la tangente et la cotangente d'un arc sont des **fonctions périodiques** de cet arc dont la **période** est π.

Notons que :

1° Le point T n'existe plus si M est en B ou B'. De même le point U n'existe plus si M est en A ou A'. Si M en décrivant le cercle trigonométrique vient se confondre avec B ou B', le point T s'éloigne à l'infini sur l'axe At. De même, si M vient se confondre avec A ou A', le point U s'éloigne à l'infini sur l'axe Bu; donc :

$$\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right| = \infty \qquad |\operatorname{cotg} k\pi| = \infty.$$

2° tg a et cotg a sont positifs lorsque l'extrémité M de l'arc a appartient aux quadrants I ou III; tg a et cotg a sont négatifs lorsque M appartient aux quadrants II ou IV. D'autre part :

$$\operatorname{tg} k\pi = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0.$$

Le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente d'un arc se nomment FONCTIONS CIRCULAIRES de cet arc.

207. Fonctions circulaires d'un angle.

Les fonctions circulaires d'un angle sont celles de l'arc correspondant.

Cela résulte de ce que l'angle au centre $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ et l'arc correspondant $\overset{\frown}{AM}$ sont mesurés par le même nombre. Dans les symboles sin a, cos a, tg a et cotg a, le nombre a pourra indifféremment désigner $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ou $\overset{\frown}{AM}$.

RELATIONS FONDAMENTALES

208. Théorème. — ***Les fonctions circulaires d'un même arc a sont liées par les relations suivantes :***

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$	$\operatorname{tg} a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$	$\operatorname{cotg} a = \dfrac{\cos a}{\sin a} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} a}$

1° On a (fig. 104) : $\overset{\frown}{AM} = a$; $\cos a = \overline{OP}$; $\sin a = \overline{OQ} = \overline{PM}$.

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle OPM :

$$\overline{PM}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\sin^2 a + \cos^2 a = 1} \qquad (1)$$

où $\sin^2 a$ et $\cos^2 a$ symbolisent les carrés de sin a et cos a : $(\sin a)^2$ et $(\cos a)^2$.

Cette relation permet de calculer la *valeur absolue* de sin a ou cos a quand on connaît cos a ou sin a. On en tire en effet :

$$\sin a = \pm\sqrt{1 - \cos^2 a} \qquad \text{et} \qquad \cos a = \pm\sqrt{1 - \sin^2 a}.$$

2° On a (fig. 104) $\operatorname{tg} a = \overline{AT}$. Le vecteur $\overrightarrow{AT}$ est l'homologue de $\overrightarrow{PM}$ dans l'homothétie $\left(O, \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OP}}\right)$. Le rapport de $\overrightarrow{PM}$ à $\overrightarrow{AT}$ est égal au rapport d'homothétie : $\dfrac{\overrightarrow{AT}}{\overrightarrow{PM}} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OP}}$ ou $\dfrac{\overrightarrow{AT}}{\overrightarrow{OQ}} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OP}}$, soit puisque les axes Oy et At ont même sens : $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{OQ}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$, soit :

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\sin a} = \frac{1}{\cos a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}.} \qquad (2)$$

3° On a (fig. 104) $\operatorname{cotg} a = \overline{BU}$. Le vecteur $\overrightarrow{BU}$ est l'homologue de $\overrightarrow{QM}$ dans l'homothétie $\left(O, \dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OQ}}\right)$. Donc : $\dfrac{\overrightarrow{BU}}{\overrightarrow{QM}} = \dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OQ}}$ ou $\dfrac{\overrightarrow{BU}}{\overrightarrow{OP}} = \dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OQ}}$, soit, comme les axes O$x$ et Bv sont de même sens : $\dfrac{\overline{BU}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OQ}}$,

ou :

$$\frac{\operatorname{cotg} a}{\cos a} = \frac{1}{\sin a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}} \qquad (3)$$

209. Autres relations. — Eliminons sin a entre les relations (1) et (2) en divisant les deux membres de (1) par $\cos^2 a$ que nous supposons différent de zéro :

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{1 + \mathrm{tg}^2\, a = \frac{1}{\cos^2 a}} \qquad (4)$$

La relation (4) reste valable si $\cos a \neq 0$, car ses deux membres sont alors infinis et positifs.
De même, en divisant les deux membres de (1) par $\sin^2 a$, on trouve :

$$1 + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{1 + \mathrm{cotg}^2\, a = \frac{1}{\sin^2 a}} \qquad (5)$$

210. Calculer les fonctions circulaires d'un arc connaissant l'une d'elles.

1° ON CONNAIT $\cos \alpha = a$. — On a (n° 208), en supposant $|a| \leqslant 1$:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - a^2}, \quad \text{puis :}$$

$$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \pm \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a} \quad \text{et} \quad \mathrm{cotg}\, \alpha = \pm \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Géométriquement, la donnée $\cos \alpha = a$ fixe P, projection de l'extrémité M de l'arc α sur l'axe des cosinus ; on obtient ainsi deux points M et M′, sur le cercle trigonométrique, symétriques par rapport à $x'x$ (fig. 105), donc deux points Q, Q′ et T, T′ symétriques par rapport au même axe, ce qui explique les signes $\pm$ devant les valeurs trouvées pour sin α et tg α.

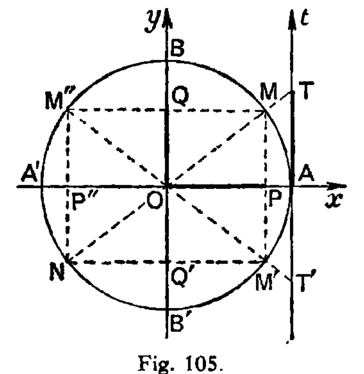


Fig. 105.

2° ON CONNAIT $\sin \alpha = b$. — En supposant $|b| \leqslant 1$:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - b^2},$$

puis : $$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \pm \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}}$$

et $$\mathrm{cotg}\, \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - b^2}}{b}.$$

Géométriquement, la donnée $\sin \alpha = b$ fixe Q projection de l'extrémité M de l'arc α sur l'arc $y'y$. On obtient ainsi deux points M et M″, symétriques par rapport à $y'y$ (fig. 105), donc deux points P, P″ symétriques par rapport à $y'y$ et deux points T, T′ symétriques par rapport à $x'x$, ce qui explique les signes $\pm$ devant les valeurs trouvées pour cos α et tg α.

3° ON CONNAIT $\mathrm{tg}\, \alpha = t$. — On a (n° 208) :

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\, \alpha \quad \text{ou} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + t^2} \quad \text{soit} \quad \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$

puis : $$\sin \alpha = \cos \alpha \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha = \pm \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \text{et} \quad \mathrm{cotg}\, \alpha = \frac{1}{t}.$$

Géométriquement, la donnée $\mathrm{tg}\, \alpha = t$ fixe le point T où le diamètre passant par l'extrémité M de l'arc α coupe l'axe des tangentes. On obtient ainsi deux points M et N sur le cercle trigonométrique, symétriques par rapport à O (fig. 105), donc deux points P, P″ et Q, Q′ symétriques par rapport au même point O, ce qui explique le signe $\pm$ devant les valeurs trouvées pour cos α et sin α.

Remarquons qu'il faut prendre le même signe (+ ou —) dans les formules qui donnent cos α et sin α.

ARCS REMARQUABLES

211. Théorème préliminaire. — Soit MM′ le côté d'un polygone régulier convexe de n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique (fig. 106). L'angle au centre de ce polygone est $\frac{2\pi}{n}$ radians. Soit P le milieu de MM′ et A le point où la demi-droite OP coupe le cercle. Adoptons A comme origine des arcs sur le cercle :

$$\widehat{AOM} = \frac{\pi}{n}; \quad \cos \widehat{AOM} = \overline{OP}; \quad \sin \widehat{AOM} = \overline{PM}.$$

Or, PM est le *demi-côté* du polygone et OP son *apothème*. Donc :

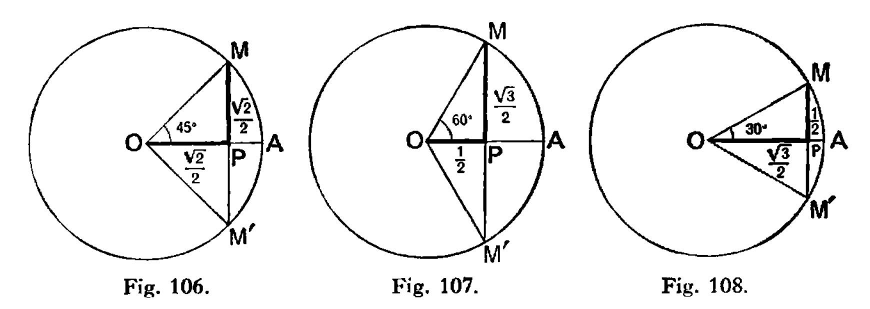


Fig. 106. Fig. 107. Fig. 108.

Si on connaît le côté c_n et l'apothème a_n du polygone régulier convexe de n côtés inscrit dans un cercle de rayon unité, on peut calculer le sinus et le cosinus de $\frac{\pi}{n}$ par les relations :

$$\boxed{\sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} c_n} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos \frac{\pi}{n} = a_n.}$$

212. Applications.

1° $n = 4$ (fig. 106) : $c_4 = \sqrt{2}$; $a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et :
$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1; \quad \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

2° $n = 3$ (fig. 107): $c_3 = \sqrt{3}$; $a_3 = \frac{1}{2}$; $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

puis :
$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3° $n = 6$ (fig. 108) : $c_6 = 1$; $a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

puis :
$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Les résultats obtenus, rangés dans le tableau suivant, doivent être sus par cœur :

Angles	0	$\frac{\pi}{6} = 30^o$	$\frac{\pi}{4} = 45^o$	$\frac{\pi}{3} = 60^o$	$\frac{\pi}{2} = 90^o$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
Cotangente	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ARCS ASSOCIÉS

213. Remarque. — Dans tout ce qui suit, les arcs dont il sera question auront tous pour origine le même point A, origine des abscisses curvilignes sur le cercle trigonométrique.

214. Arcs opposés. — ***Deux arcs sont opposés quand la somme de leurs mesures est nulle.***

Si l'un vaut a, l'autre vaut $-a$. Exemples : $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$; $+100^o$ et -100°; $+520$ gr et -520 gr.

Soit : $\overset{\frown}{AM} = a$ et $\overset{\frown}{AM'} = -a$ (fig. 109).

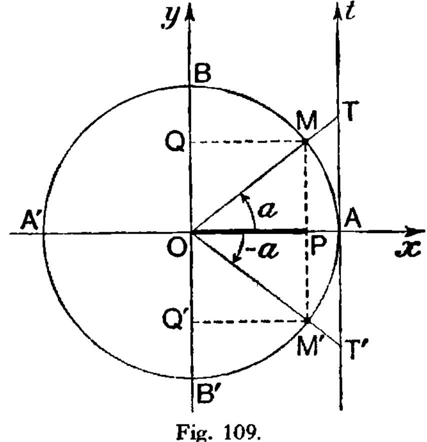


Fig. 109.

On peut imaginer que ces arcs sont décrits par deux mobiles m et m' partant de A, avec la même vitesse, dans deux sens différents; m et m' restent alors symétriques par rapport au diamètre A'A et il en est de même de M et M' :

THÉORÈME. — ***Deux arcs opposés ont leurs extrémités symétriques par rapport à l'axe des cosinus.***

COROLLAIRE. — M et M' étant les extrémités de deux arcs opposés, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ont des projections égales sur l'axe des cosinus, des projections opposées sur l'axe des sinus. Donc :

$$\cos(-a) = \cos a \quad ; \quad \sin(-a) = -\sin a$$
$$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a \quad ; \quad \operatorname{cotg}(-a) = -\operatorname{cotg} a$$

Deux arcs opposés ont même cosinus; ils ont des sinus, des tangentes et des cotangentes opposés.

EXEMPLES :

$$\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}; \quad \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg}(-45^\circ) = -1.$$

215. Arcs supplémentaires. — ***Deux arcs sont supplémentaires quand la somme de leurs mesures en radians est*** π.

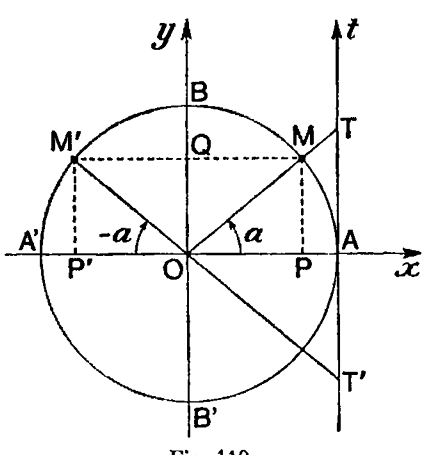


Fig. 110.

Si l'un vaut a, l'autre vaut $\pi - a$.

EXEMPLES : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$; -20° et 200°; 250 gr et -50 gr.

Soit $\overset{\frown}{AM} = a$ et $\overset{\frown}{AM'} = \pi - a$ (fig. 110).

L'arc $\overset{\frown}{AM'} = \pi - a$ s'obtient en décrivant l'arc $\overset{\frown}{AA'} = \pi$, puis l'arc $\overset{\frown}{A'M'} = -a$.

Il existe donc deux arcs $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{A'M'}$ de valeurs respectives a et $-a$. L'axe de symétrie de la figure formée par ces deux arcs de même valeur absolue est l'axe des sinus et :

THÉORÈME. — ***Deux arcs supplémentaires ont leurs extrémités symétriques par rapport à l'axe des sinus.***

COROLLAIRE. — Il en résulte que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ont des projections égales sur l'axe des sinus, des projections opposées sur l'axe des cosinus, donc :

$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$
$\operatorname{tg}(\pi - a) = -\operatorname{tg} a$	$\operatorname{cotg}(\pi - a) = -\operatorname{cotg} a$

Deux angles supplémentaires ont même sinus; ils ont des cosinus, des tangentes et des cotangentes opposés.

EXEMPLES :

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = -\cos(-60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

216. Arcs complémentaires. — ***Deux arcs sont complémentaires quand la somme de leurs mesures en radians vaut*** $\frac{\pi}{2}$.

Si l'un vaut a, l'autre vaut $\frac{\pi}{2} - a$. Exemples : $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$; -10° et 100°; 430 gr et -330 gr.

Soit $\overset{\frown}{AM} = a$ et $\overset{\frown}{AM'} = \frac{\pi}{2} - a$ (fig. 111).

L'arc $\overset{\frown}{AM'} = \frac{\pi}{2} - a$ s'obtient en décrivant l'arc $\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{2}$, puis l'arc $\overset{\frown}{BM'} = -a$.

Il existe donc deux arcs $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{BM'}$ de valeurs respectives a et $-a$. L'axe de symétrie de la figure formée par ces deux arcs de même valeur absolue est la bissectrice des angles xOy et $x'Oy'$ (première bissectrice).

THÉORÈME. — ***Deux arcs complémentaires ont leurs extrémités symétriques par rapport à la première bissectrice.***

COROLLAIRE. — On sait alors que, par rapport aux axes xOy, l'abscisse de l'un des points M ou M' est égale à l'ordonnée de l'autre; donc :

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{cotg}\, a$	$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{tg}\, a$

Si deux arcs sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre; la tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre.

EXEMPLES : $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\text{tg}\, 60^\circ = \text{cotg}\, 30^\circ = \sqrt{3}$.

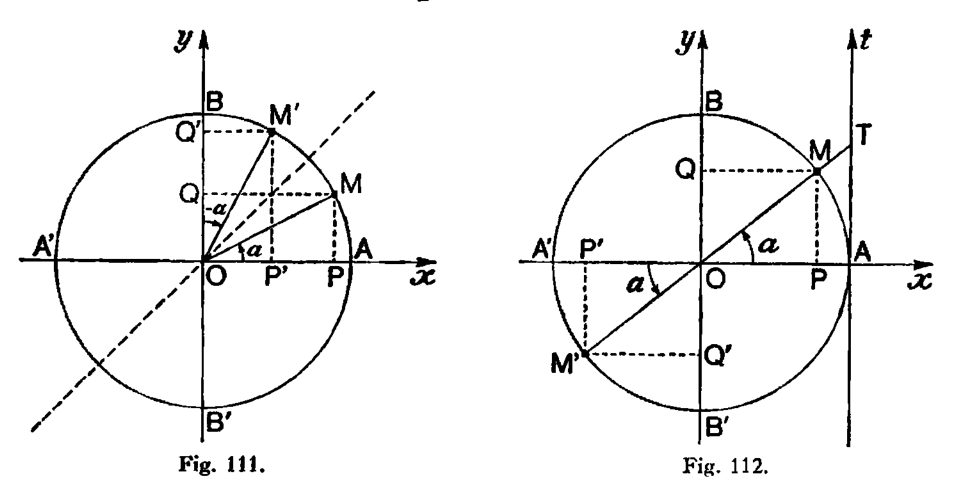


Fig. 111. Fig. 112.

217. Arcs dont la différence est π.

Soit : $\overset{\frown}{AM} = a$ et $\overset{\frown}{AM'} = \pi + a$ (fig. 112).

Puisque $\overset{\frown}{AM'} = a + \pi = \overset{\frown}{AM} + \pi$, M et M' sont diamétralement opposés et par suite les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ont des projections opposées sur les axes des sinus et des cosinus :

$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\cos(\pi + a) = -\cos a$
$\text{tg}(\pi + a) = \text{tg}\, a$	$\text{cotg}(\pi + a) = \text{cotg}\, a.$

Deux arcs qui diffèrent de π radians ont même tangente et même cotangente. Ils ont des sinus et des cosinus opposés.

On peut aussi le vérifier en remarquant que l'arc $\pi + a$ est le supplément de $-a$; donc :

$$\sin(\pi + a) = \sin(-a) = -\sin a$$
$$\cos(\pi + a) = -\cos(-a) = -\cos a.$$

EXEMPLES :
$$\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$
$$\cos \frac{7\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

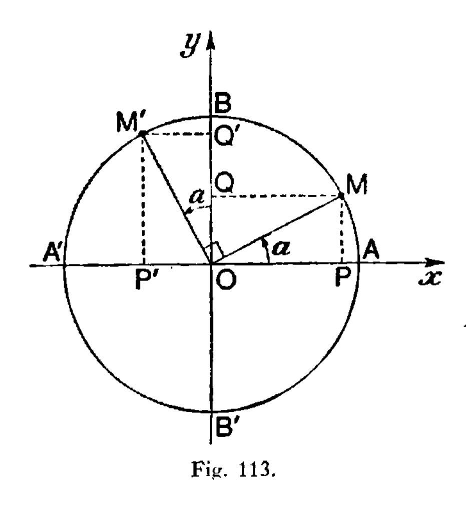


Fig. 113.

218. Arcs dont la différence est $\frac{\pi}{2}$.

Soit : $\overset{\frown}{AM} = a$ et $\overset{\frown}{AM'} = \frac{\pi}{2} + a$ (fig. 113).

On a : $\frac{\pi}{2} + a = \frac{\pi}{2} - (-a)$;

$\overset{\frown}{AM'}$ est donc le complément de $-a$ et :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(-a) = \cos a$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(-a) = -\sin a$$

soit :

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$
$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\text{cotg}\, a$	$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\text{tg}\, a$

EXEMPLES : $\sin 120^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$.

EXERCICES

726. M désigne l'extrémité de l'arc $\overset{\frown}{AM} = x$ sur le cercle trigonométrique. L'axe OM, orienté de O vers M coupe l'axe des tangentes en T et celui des cotangentes en U.

1° Évaluer $\overline{OT}$ et $\overline{OU}$ par rapport aux fonctions circulaires de l'arc x.

2° Retrouver directement la relation entre cos x et tg x, puis la relation entre sin x et cotg x.

727. Dans les mêmes conditions qu'à l'exercice précédent, la tangente en M au cercle trigonométrique coupe respectivement les axes des cosinus et des sinus en P et Q.

1° Évaluer par rapport aux fonctions circulaires de x les mesures algébriques des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$.

2° En déduire la relation : $\dfrac{1}{\overline{OM}^2} = \dfrac{1}{\overline{OP}^2} + \dfrac{1}{\overline{OQ}^2}$.

— Démontrer les relations suivantes :

728. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$.

729. $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$.

730. $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

731. $(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 4 \sin x \cos x$.

732. $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin^2 y - \sin^2 x = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x} - \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 y}$.

733. $(\sin x + \cos x)^2 = \sin x \cos x (1 + \text{tg}\, x)(1 + \text{cotg}\, x)$.

734. $\text{tg}\, x \ \text{tg}\, y \ (\text{cotg}\, x + \text{cotg}\, y) = \text{tg}\, x + \text{tg}\, y$.

735. $\text{cotg}^2 x = \cos^2 x + \cos^2 x \ \text{cotg}^2 x$.

736. $\text{tg}^2 x = \sin^2 x + \sin^2 x \ \text{tg}^2 x$.

737. $\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1$.

738. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

739. $\sin^8 x + \cos^8 x = 1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^4 x \cos^4 x$.

740. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1 - 5 \sin^2 x \cos^2 x + 5 \sin^4 x \cos^4 x$.

741. $\sin x \cos x (\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x) = 1$.

742. $\sin x \cos x (1 + \text{cotg}^2 x) = \text{cotg}\, x$.

743. $1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = 1 + \text{tg}^2 x + \text{tg}^4 x$.

744. $\dfrac{-4 \sin^3 x + 3 \sin x}{4 \cos^3 x - 3 \cos x} = \dfrac{3 \,\text{tg}\, x - \text{tg}^3 x}{1 - 3 \,\text{tg}^2 x}$.

745. Montrer que les fonctions : $F(\cos x)$; $F(\cos x, \sin^2 x)$; $F(\cos x, \text{tg}^2 x)$ sont paires.

746. Montrer que les fonctions : $\sin x \ F(\cos x)$; $\text{tg}\, x \ F(\sin^2 x)$ sont impaires.

747. Montrer que les fonctions $F(\sin x)$; $F(\sin x, \cos^2 x)$; $F(\sin x, \text{cotg}^2 x)$ sont telles que $F(\pi - x) = F(x)$, $\forall x \in D$, domaine de définition de la fonction F.

748. Montrer que les fonctions $F(\text{tg}\, x)$; $F(\cos 2x)$; $F(\sin 2x)$ sont telles que, $F(x + \pi) = F(x)$, $\forall x \in D$ domaine de définition de la fonction F.

749. Montrer que les fonctions $F(\sin x + \cos x)$; $F(\sin x \cos x)$; $F(\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x)$ sont telles que $F\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = F(x)$, $\forall x \in D$ domaine de définition de la fonction F.

750. Soit l'équation du second degré en x :

$$(2 \cos \alpha - 1)\, x^2 - 2x + \cos \alpha = 0.$$

Étudier suivant les valeurs de $\cos \alpha$ l'existence et le signe des racines de l'équation.

— Résoudre les équations en x :

751. $x^2 - x(\sin a + \cos a) + \sin a \cos a = 0.$

752. $x^2 + x(\sin a + \cos a) + \sin a \cos a = 0.$

753. $x^2 - x(\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a) + 1 = 0.$

754. $x^2 \sin a \cos a + x + \sin a \cos a = 0.$

755. On considère l'équation du second degré en x : $m(1 + x^2) = ax^2 + 2bx + c.$

1° On suppose qu'elle admet une racine double pour $m = 1$ et pour $m = -1$. En déduire les relations qui lient les coefficients a, b et c.

2° On suppose $b = \sin \alpha$. Calculer, dans les conditions du 1°, les coefficients a et c en fonction de α.

756. On considère le trinôme en $\cos \alpha$: $y = 2\cos^2 \alpha - 9\cos \alpha + 10.$

1° Montrer qu'il est positif quel que soit α.

2° Quelle est la valeur de y pour $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ou 2π?

3° Reprendre les mêmes questions pour le trinôme $y = 2\sin^2 \alpha - 9\sin \alpha + 10.$

757. On considère, en orthonormées, les droites D_1 et D_2 dont les équations en fonction du paramètre α sont : $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1$; $-x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0.$

1° Montrer que ces droites sont perpendiculaires, quel que soit α.

2° Exprimer les coordonnées de leur point commun en fonction de α.

3° Trouver le lieu de ce point commun.

758. Calculer $\sin x$ et $\cos x$ connaissant $\operatorname{tg} x = 2$ et sachant que l'extrémité de l'arc x appartient au quadrant I.

759. Calculer $\sin x$ et $\cos x$ connaissant $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$ et sachant que l'extrémité de l'arc x appartient au quadrant II.

760. Calculer $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$ sachant que $\sin x = -\frac{1}{4}$ et que l'extrémité de l'arc x appartient au quadrant III.

761. Calculer $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ sachant que $\cos x = 0{,}3$ et que l'extrémité de l'arc x appartient au quadrant IV.

762. 1° Résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$

où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres donnés.

2° Quelle condition doivent vérifier ces six coefficients pour qu'on puisse écrire : $x = \cos\alpha$ et $y = \sin\alpha$?

3° Montrer que les droites représentant en orthonormées les équations (1) et (2) se coupent alors sur le cercle trigonométrique dont le centre est l'origine des coordonnées.

763. On donne un quart de circonférence de centre O limité en C et D par les demi-droites rectangulaires OX et OY. Son rayon est l'unité de longueur. La tangente à ce quart de cercle en l'un de ses points M coupe OX en A et OY en B. On désigne par m l'angle XOM.

1° Calculer les longueurs OA, OB et AB à l'aide des fonctions circulaires de l'angle m.

Pour quelle position du point M la longueur AB est-elle minimum?

2° En A et B, du même côté du plan XOY, on trace les demi-droites AU et BV perpendiculaires à ce plan. Sur AU on prend le point E et sur BV le point F tels que AE = AO, BF = BO.

Quelle condition doivent vérifier les fonctions circulaires de l'angle m pour que le triangle OEF soit rectangle en E ? Montrer que cette condition peut s'écrire $\operatorname{tg} m = \frac{1}{2}$. Donner une construction géométrique simple du point M correspondant.

— Calculer les fonctions circulaires des arcs suivants :

764. 9π; 11π; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{-5\pi}{2}$; $\frac{13\pi}{4}$.

765. $\frac{-5\pi}{4}$; $\frac{10\pi}{3}$; $\frac{-5\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{-16\pi}{3}$.

766. $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{-17\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{29\pi}{6}$; $\frac{-7\pi}{6}$.

— Montrer que les expressions suivantes restent inchangées dans les conditions indiquées :

767. $3\cos^2 x - 5\cos x + 7$ en changeant x en $-x$.

768. $2\sin^2 x - 3\sin x + 2$ en changeant x en $\pi - x$.

769. $a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x + d$ en changeant x en $\pi + x$.

770. $\sin^3 x + \cos^3 x - \sin x - \cos x$ en changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$.

771. $\frac{\operatorname{tg} x + \sin 2x}{\cos 4x}$ en changeant x en $\pi + x$.

772. $\frac{\sin 3x + \cos 3x}{\sin x}$ en changeant x en $\pi + x$.

773. On considère la fonction y de x définie par la relation $y = \frac{3 - 2x}{5 + x}$.

1° Étudier les variations de cette fonction lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$ et les représenter graphiquement en prenant 5 mm comme unité de longueur sur Ox et sur Oy.

2° Calculer l'expression de la dérivée de y par rapport à x pour $x = x_0$.

3° Déterminer x_0 pour qu'au point correspondant de la courbe représentative le coefficient directeur de la tangente soit égal à $\operatorname{tg}\theta$. Comment faut-il choisir θ pour que cela soit possible ?

Application numérique : $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

RECHERCHE DES FONCTIONS CIRCULAIRES D'UN ARC DONNÉ

219. 1er Cas : Arc du 1er quadrant. — Les tables des pages 346 et 347 fournissent les valeurs des fonctions circulaires des arcs compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Ces tables sont à double entrée : pour les arcs compris entre 0 et 45° (ou 50 gr) prendre la valeur de l'arc dans la colonne de gauche et la fonction circulaire à la ligne supérieure; pour les arcs complémentaires, de 45° à 90° (ou de 50 gr à 100 gr), prendre la valeur de l'arc dans la colonne de droite et la fonction circulaire à la ligne inférieure. Exemples :

$$\text{tg } 38^\circ = 0{,}7813 \qquad \frac{1}{\cos 73^\circ} = 3{,}420 \qquad \cos 29^\circ = \sin 61^\circ = 0{,}8746.$$

Si l'arc ne figure pas dans la table, on procède par *interpolation* en admettant que :

Entre deux valeurs consécutives de la table, les accroissements relatifs de l'arc et d'une fonction circulaire correspondante sont proportionnels.

Exemple. — *Déterminer* sin 32°25′ *et* cos 32°25′.

Pratiquement, on dispose les calculs de la façon suivante :

sin 32° .... $= 0{,}5299$ D $= 147$	cos 32° .... $= 0{,}8480$ D $= -93$
Pour 25′ : $\frac{147 \times 25}{60} = 61$	Pour 25′ : $\frac{-93 \times 25}{60} = -38$
sin 32°25′......... $= 0{,}5360$	cos 32°25′......... $= 0{,}8432$

220. 2e Cas : Arc quelconque.

Si α n'appartient pas au premier quadrant, on cherche un arc β tel que les fonctions circulaires de α et de β aient mêmes valeurs absolues. Cette opération se nomme **réduction de l'arc au premier quadrant.** On commence par ajouter ou retrancher à α, si besoin est, un nombre entier de circonférences (ce qui n'altère pas les fonctions circulaires), de façon que l'arc α' obtenu appartienne aux quadrants I, II, III ou IV.

Exemples. — 1° $\sin 773^\circ = \sin(773^\circ - 360^\circ \times 2) = \sin 53^\circ = 0{,}7986$.

2° $\cos 447^\circ = \cos(447^\circ - 360^\circ) = \cos 117^\circ$ (2e quadrant). Dans ce cas, on prend le supplément : $180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$. Donc : $\cos 477^\circ = \cos 117^\circ = -\cos 63^\circ = -0{,}4540$.

ÉQUATIONS FONDAMENTALES

221. Position du problème. — Un arc étant donné, on a pu définir ses fonctions circulaires (nos 205 et 206). La question se pose de savoir si, réciproquement, la connaissance d'une fonction circulaire d'un arc suffit à déterminer cet arc. Le problème qui consiste à déterminer l'arc (ou les arcs) qui admettent une fonction circulaire donnée se nomme inversion de cette fonction circulaire.

ÉQUATION : $\cos x = a$

222. Condition nécessaire et suffisante pour que deux arcs aient même cosinus. — Pour que deux arcs α et β d'origine A (fig. 114) aient même cosinus, il faut et il suffit que leurs extrémités aient même projection P sur l'axe des cosinus, donc que ces extrémités soient, ou confondues, ou symétriques par rapport à l'axe des cosinus.

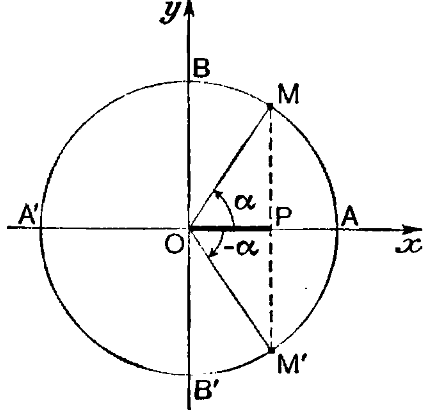


Fig. 114.

Pour que α et β aient même extrémité M il faut et il suffit qu'ils diffèrent de $2\,k\pi$ (n° 195), soit :

$$\alpha - \beta = 2\,k\pi.$$

Pour que α et β aient des extrémités M et M' symétriques par rapport à l'axe des cosinus, il faut et il suffit que l'un des arcs $\overrightarrow{\mathrm{AM}'}$ soit l'opposé de $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \alpha$, donc que :

$$\beta = -\alpha + 2\,k\pi \quad \text{soit} \quad \alpha + \beta = 2\,k\pi.$$

En définitive :

Pour que deux arcs aient même cosinus il faut et il suffit que leur somme ou leur différence soit un multiple pair de π.

223. Résoudre l'équation : $\cos x = \cos \alpha$. — La condition précédente donne :

$$x \pm \alpha = 2k\pi \quad \text{soit :} \quad \boxed{x = \pm\,\alpha + 2k\pi}$$

On obtient ainsi deux extrémités d'arcs x répondant à la question; ces extrémités M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des cosinus; elles sont confondues en A ou A' selon que α est un multiple pair ou impair de π.

Exemples. — 1° *Résoudre :* $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$.

On a : $$x = \pm \frac{\pi}{5} + 2\,k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pm\, 36^\circ + k.\,360^\circ$$

et deux extrémités d'arcs répondant à la question.

2° *Résoudre :* $\cos 5x = \cos \frac{\pi}{3}$.

On se ramène au cas précédent en posant $X = 5x$.

On obtient : $$5x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{ou} \quad x = \pm 12° + k.\,72°.$$

Fig. 115.

Lorsque k augmente d'une unité, l'arc x augmente de $\frac{2\pi}{5}$, donc si k augmente de 5 unités, on retrouve une extrémité d'arc déjà obtenue.

Les extrémités des arcs $x = 12° + k.72°$ sont les sommets d'un pentagone régulier.

Les extrémités des arcs $x = -12° + k.72°$ sont les sommets d'un second pentagone régulier respectivement symétriques des sommets du précédent par rapport à l'axe des cosinus.

Nous trouvons dix extrémités d'arcs répondant à la question (fig. 115).

3° *Résoudre :* $\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

On se ramène au cas général en posant $\alpha = 2x - \frac{2\pi}{3}$; $\beta = \frac{\pi}{3} - x$.

On obtient : $$\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) \pm \left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2k\pi.$$

En prenant le signe + on a : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (une extrémité d'arcs). (1)

En prenant le signe — : $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ (trois extrémités d'arcs). (2)

(En tout, trois extrémités d'arcs répondant à la question, car pour $k = 0$ les arcs (1) et (2) ont même extrémité).

224. Résoudre l'équation : $\cos x = a$.

Si $|a| \leqslant 1$ il existe un arc α et un seul, compris entre 0 et π et admettant a pour cosinus. On le détermine à l'aide de la table et on se trouve ramené à l'équation $\cos x = \cos \alpha$.

Exemples. — 1° *Résoudre :* $\cos x = 0{,}6$.

La table donne :

$\cos 53° = 0{,}6018$ $\quad$ $\cos 54° = 0{,}5878$ $\quad$ $D = -140$

$\cos x = 0{,}6$

$d = -18$

Pour $D = -140$ $\quad$ $\Delta\alpha = +60'$.

Pour $d = -18$ $\quad$ $\Delta\alpha = \frac{60' \times 18}{140} = 7',71$; on arrondit à $8'$

Donc $\alpha = 53° 8'$

et on obtient : $$x = \pm 53° 8' + k.\,360°.$$

2° *Résoudre :* $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

Soit : $$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}.$$

Donc : $$3x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

soit : $$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2k\pi}{3}$$

et 6 extrémités d'arcs répondant à la question.

225. Remarques. — 1° L'équation $\sin x = \cos\alpha$ se ramène au n° 223 en remplaçant $\sin x$ par $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} - x = \pm\alpha + 2k\pi.$$

2° L'équation $\cos x = -\cos\alpha$ s'écrit : $\cos x = \cos(\pi + \alpha)$ et donne
$$x = \pm\alpha + (2k+1)\pi.$$

ÉQUATION : $\sin x = b$

226. Condition nécessaire et suffisante pour que deux arcs aient même sinus. — Pour que deux arcs α et β, d'origine A (fig. 116), aient même sinus, il faut et il suffit que leurs extrémités aient même projection Q sur l'axe des sinus, donc que leurs extrémités M et M' soient, ou confondues, ou symétriques par rapport à l'axe des sinus.

Pour que α et β aient même extrémité M il faut et il suffit qu'ils diffèrent de $2k\pi$, soit:
$$\alpha - \beta = 2k\pi.$$

Pour que α et β aient des extrémités M et M' symétriques par rapport à l'axe des sinus, il faut et il suffit que l'un des arcs AM' soit supplémentaire de AM $= \alpha$, donc que :
$$\beta = \pi - \alpha + 2k\pi$$
ou $$\alpha + \beta = (2k+1)\pi.$$

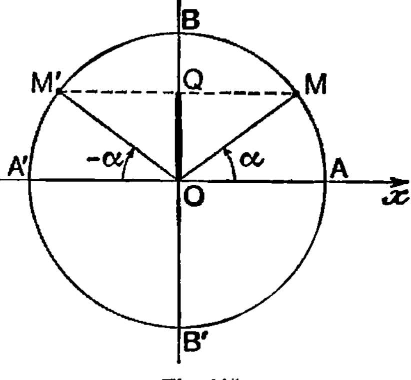


Fig. 116.

En définitive :

Pour que deux arcs aient même sinus, il faut et il suffit que leur différence soit un multiple pair de π ou leur somme un multiple impair de π.

227. Résoudre l'équation : $\sin x = \sin\alpha$.

La condition précédente donne :

$$\boxed{x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi}$$

On obtient ainsi deux extrémités d'arcs x répondant à la question; ces extrémités sont symétriques par rapport à l'axe des sinus; elles sont confondues en B ou B' si α est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$.

EXEMPLES. — 1° *Résoudre :* $\sin x = \sin 20°$ (x en degrés).

On obtient : $x = 20° + k.360°$ ou $x = 160° + k.360°$ et deux extrémités d'arcs possibles.

2° *Résoudre :*
$$\sin 4x = \sin \frac{2\pi}{5}.$$

Elle se ramène au cas précédent en posant $4x = X$; on a :

$$4x = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 4x = \pi - \frac{2\pi}{5} + 2k\pi,$$

soit :
$$x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}.$$

Si k augmente de 1, l'un des arcs x augmente de $\frac{\pi}{2}$; si k augmente de 4 on retrouve une extrémité d'arc déjà obtenue; on obtient 8 extrémités possibles, sommets de deux carrés inscrits dans le cercle trigonométrique.

3° *Résoudre :*
$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$$

On se ramène au cas général en posant $\frac{\pi}{3} + x = \alpha$ et $\frac{\pi}{3} - x = \beta$.

On obtient :
$$\frac{\pi}{3} + x + \frac{\pi}{3} - x = (2k + 1)\pi \qquad (1)$$

ou
$$\frac{\pi}{3} + x - \frac{\pi}{3} + x = 2k\pi. \qquad (2)$$

La condition (1) donne : $\frac{2\pi}{3} = (2k + 1)\pi$, ce qui est impossible.

La condition (2) donne : $x = k\pi$
et deux extrémités d'arcs possibles (A ou A').

228. Résoudre l'équation : $\sin x = b$.

Si $|b| \leqslant 1$ il existe un arc α et un seul, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et admettant b pour sinus. On le détermine à l'aide de la table et on se trouve ramené à l'équation :
$$\sin x = \sin \alpha.$$

EXEMPLE. — *Résoudre :* $\sin x = -0{,}25$.

Cherchons un arc α' compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que : $\sin \alpha' = 0{,}25$.

La table donne : $\sin 14° = 0{,}2419$; $\sin 15° = 0{,}2588$; $D = 169$; $d = 81$

Pour $D = 169$: $\Delta\alpha = +60'$

Pour $d = 81$: $\Delta\alpha = \frac{60' \times 81}{169} = 28',7$; on arrondit à 29'.

Donc $\alpha' = 14°29'$ et $\alpha = -14°\,29'$

ce qui donne $x = -14°\,29' + k.360°$

ou $x = 194°\,29' + k.360°$

et deux extrémités d'arcs.

229. Remarque. — L'équation $\sin x = -\sin\alpha$ se ramène à $\sin x = \sin\alpha'$ en posant $\alpha' = -\alpha$.

ÉQUATION : $\mathrm{tg}\, x = t$

230. Condition nécessaire et suffisante pour que deux arcs aient même tangente.

Pour que deux arcs α et β d'origine A (fig. 117) aient même tangente $\overline{AT}$, il faut et il suffit que leurs extrémités appartiennent à la droite OT, donc que ces extrémités M et M' soient, ou confondues, ou symétriques par rapport à O.

Dans le premier cas, il faut et il suffit que α et β diffèrent de $2k\pi$.

Dans le second cas, il faut et il suffit que l'un des arcs AM' soit égal à :

$$\overset{\frown}{AM} + \pi = \alpha + \pi,$$

donc que : $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi$

ou que : $\beta - \alpha = (2k+1)\pi$.

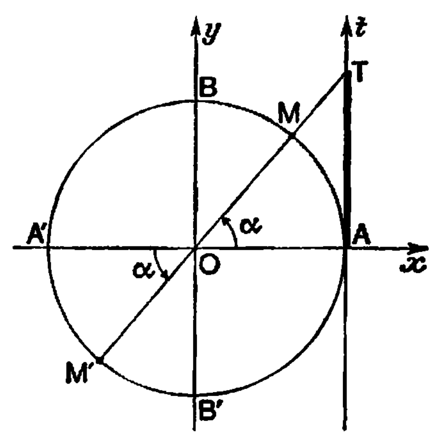


Fig. 117.

En définitive :

Pour que deux arcs aient même tangente il faut et il suffit que leur différence soit un multiple de π : $\beta - \alpha = k\pi$.

231. Résoudre l'équation : $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\,\alpha$.

La condition précédente donne :

$$\boxed{x = \alpha + k\pi}$$

On obtient ainsi deux extrémités d'arcs x répondant à la question et ces extrémités sont symétriques par rapport à O.

EXEMPLES. — 1° *Résoudre :* $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}$

On trouve $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

et deux extrémités d'arcs répondant à la question.

2° *Résoudre :* $\mathrm{tg} x + \mathrm{tg}\, 2x = 0$.

L'équation s'écrit : $\mathrm{tg}\, x = -\mathrm{tg}\, 2x = \mathrm{tg}\,(-2x)$.

En posant $x = \alpha$ et $-2x = \beta$, on retrouve l'équation $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ ce qui donne :

$$x = -2x + k\pi \quad \text{donc} \quad x = \frac{k\pi}{3}$$

et 6 extrémités d'arcs répondant à la question.

232. Résoudre l'équation : $\operatorname{tg} x = t$.

Quel que soit t, il existe un arc α et un seul, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, admettant t pour tangente. Cet arc étant déterminé, on est ramené à l'équation $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$ que l'on sait résoudre.

EXEMPLE : *Résoudre l'équation :* $\operatorname{tg} x = -0{,}7456$.

Cherchons un arc α' admettant pour tangente 0,7456. On lit dans la table

$$\operatorname{tg} 36^\circ = 0{,}7265 \qquad \operatorname{tg} 37^\circ = 0{,}7536 \qquad D = 271$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = 0{,}7456$$

$$d = 191 \qquad \text{Pour } 191 : \Delta\alpha' = \frac{60' \times 191}{271} = 42'$$

$$\alpha' = 36^\circ 42' \implies \alpha = -36^\circ 42'$$

soit :

$$x = -36^\circ 42' + k.180^\circ.$$

233. Remarques.

1° L'équation $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \alpha$ s'écrit $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ et se ramène à $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$.

2° L'équation $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} \alpha$ ou $\operatorname{tg} x . \operatorname{tg} \alpha = 1$ s'écrit : $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

et donne :

$$x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi.$$

3° L'équation $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} \alpha$ s'écrit $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha'$ en posant $\alpha' = -\alpha$.

4° L'équation $\operatorname{tg} x = -\operatorname{cotg} \alpha$ ou $\operatorname{tg} x . \operatorname{tg} \alpha = -1$ s'écrit : $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$,

et donne :

$$x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k\pi.$$

EXERCICES

— Calculer, à l'aide de la table, les fonctions circulaires des arcs suivants :

774. 17°;	12°15′;	73°20′;	85°12′.
775. — 23°;	— 42°30′;	— 73 gr;	— 80,5 gr.
776. 200°;	221°30′;	253,7 gr;	221,25 gr.
777. 1 160°;	— 1 853°;	712 gr;	— 943 gr.

— Résoudre les équations suivantes et situer les extrémités des arcs correspondants sur le cercle trigonométrique :

778. $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{4}$. **779.** $\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right)$. **780.** $\cos 5x = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$.

781. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. **782.** $\cos(x + 36^\circ) = \cos(3x - 15^\circ)$.

783. $\sin\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$. **784.** $\sin 3x = \sin 5x$.

785. $\sin\left(11x + \frac{2\pi}{5}\right) + \sin x = 0$. **786.** $\cos 3x + \cos 7x = 0$.

787. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$. **788.** $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} 15^\circ$. **789.** $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} x = 0$.

790. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}\right)$. **791.** $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - 12^\circ\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{5} + 11^\circ\right)$.

792. $\operatorname{tg} 5x \operatorname{tg} x = 1$. **793.** $\operatorname{tg} 5x \operatorname{cotg} x = 1$. **794.** $\operatorname{tg}^2 5x - \operatorname{cotg}^2 x = 0$.

795. $\sin^2 3x - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = 0$. **796.** $\cos^2 4x - \cos^2(x + 25^\circ) = 0$.

797. $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$. **798.** $\sin^2\left(5x + \frac{2\pi}{5}\right) - \cos^2\left(\frac{x}{4} + \pi\right) = 0$.

799. $\sin x = \frac{1}{2}$. **800.** $\sin 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **801.** $4 \sin^2 x - 1 = 0$.

802. $\operatorname{tg} x = 1$. **803.** $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$. **804.** $3 \operatorname{cotg}^2 x - 1 = 0$.

805. $\sin x = 0{,}3$. **806.** $\sin x = -0{,}7$. **807.** $\sin x = 0{,}4531$.

808. $\cos x = 0{,}71$. **809.** $\cos x = -0{,}751$. **810.** $\cos x = 0{,}7519$.

811. $\sin\left(3x - \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$. **812.** $\cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **813.** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$.

814. $4 \sin^2(2x + 15^\circ) - 1 = 0$. **815.** $4 \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5}\right) - 3 = 0$.

816. $(2 \sin x - 1)^2 = (2 \sin x - 1)\left(\sin x - \frac{3}{2}\right)$. **817.** $8 \sin^3 x - 1 = 0$.

818. $\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}$. **819.** $\dfrac{\cos x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)} = \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)}{\cos x}$.

— Résoudre les systèmes d'équations suivants, et placer les extrémités des arcs x et y sur le cercle trigonométrique :

820. $\begin{cases} \sin x = \sin y \\ 2x - y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ **821.** $\begin{cases} \cos x = \cos y \\ 3x + 2y = \pi \end{cases}$ **822.** $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

823. $\begin{cases} \sin 2x = \sin y \\ \sin x = \cos y. \end{cases}$ **824.** $\begin{cases} \sin 3x = \cos 2y \\ \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} y. \end{cases}$ **825.** $\begin{cases} \sin x + \cos 2y = 0 \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

826. $\begin{cases} \cos \frac{5x}{2} = \cos\left(y + \frac{\pi}{5}\right) \\ \sin x + \sin 3y = 0. \end{cases}$ **827.** $\begin{cases} \operatorname{tg}\left(3x + \frac{2\pi}{7}\right) = \operatorname{tg} 3y \\ \operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} y = 0. \end{cases}$

— **Résoudre les inéquations suivantes et interpréter sur le cercle trigonométrique :**

828. $2\cos x - 1 > 0$ (pour $0 < x < \pi$).

829. $\sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\text{pour } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

830. $\operatorname{tg} x < 1$ $\left(\text{pour } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

831. $\operatorname{cotg} x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (pour $0 < x < \pi$).

832. $2\sin 3x < 1$ (pour $0 < x < 2\pi$).

833. $2\cos 2x + \sqrt{3} < 0$ (pour $-\pi < x < \pi$).

834. $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (pour $0 < x < \pi$).

835. $\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{5}\right) > -\dfrac{1}{2}$ (pour $0 < x < \pi$).

— **Le paramètre α étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$, discuter l'existence et le signe des racines des équations en x suivantes :**

830. $x^2 - 2x\sin\alpha - \cos^2\alpha = 0$.

837. $x^2 - 2x + \cos^2\alpha = 0$.

838. $x^2 - 2x\sin\alpha + \sin\alpha = 0$.

839. $2x^2 - 4x\cos\alpha + \cos\alpha = 0$.

840. $x^2 - 2x\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$.

841. $x^2 - 2x\operatorname{cotg}\alpha + 1 = 0$.

842. $4(\sin\alpha - 1)\,x^2 + 4x\sin\alpha + \sin\alpha = 0$.

843. $x^2\operatorname{tg}\alpha + 2(1 - \operatorname{tg}\alpha)\,x + \operatorname{tg}\alpha = 0$.

844. $(1 + \sin\alpha)\,x^2 - 2(\sin\alpha - 1)\,x + 13 - 15\sin\alpha = 0$.

845. On donne l'équation : $x^2 - 2x\sin\varphi + (2 - \sqrt{3})(1 - 4\cos^2\varphi) = 0$, où x est l'inconnue et φ un angle connu compris entre 0 et 2π.

1° Démontrer que cette équation admet deux racines x' et x'' quel que soit φ. Calculer φ pour que l'une des racines soit égale à 0. Trouver le signe des racines x' et x'' suivant la valeur de φ.

2° Trouver entre x' et x'' une relation indépendante de φ.

846. Soit l'équation du second degré : $(2\cos\alpha - 1)\,x^2 - 2x + \cos\alpha = 0$, α étant un angle compris entre 0 et π.

1° Étudier suivant les valeurs de α l'existence et le signe des racines x' et x''.

2° Calculer α lorsque $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''} - 4 = 0$.

3° Sur un axe orienté, on prend une origine O et deux points A et B ayant pour abscisses x' et x''. On trace le cercle de diamètre AB, et l'on se place dans le cas où l'on peut mener de O des tangentes à ce cercle. Si OT est une tangente, évaluer en fonction de α l'expression $y = \overline{OT}^2$.

4° En posant $\cos\alpha = m$, étudier les variations de y en fonction de m pour les valeurs convenables de m. Courbe représentative.

FORMULES D'ADDITION

234. Position du problème. — Nous nous proposons de calculer les fonctions circulaires des arcs $(a+b)$ et $(a-b)$ connaissant celles de a et celles de b.

235. Calcul de cos $(a-b)$.

Sur le cercle trigonométrique de centre O, rapporté au repère orthonormé xOy (fig. 118), considérons les arcs $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AN}$ respectivement égaux à a et b.

Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ ont respectivement pour composantes scalaires $(\cos a, \sin a)$ et $(\cos b, \sin b)$. L'angle géométrique MON vaut $a-b$, à $2k\pi$ près en radians, et a pour cosinus, celui de l'angle $(a-b)$. Donc :

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos(a-b)$$

(définition du produit scalaire n° 170)

et : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (expression analytique du produit scalaire n° 178). Il en résulte que :

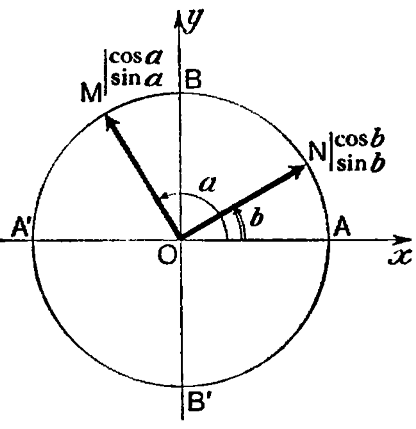


Fig. 118.

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}. \qquad (1)$$

236. Corollaires. 1° En changeant b en $-b$ dans la relation (1), on obtient :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b),$$ soit (n° 214) :

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}. \qquad (2)$$

2° Remplaçons a par $\frac{\pi}{2} - a$ dans la relation (2) :

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a-b)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b,$$ soit (n° 216) :

$$\boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a} \qquad (3)$$

3° Remplaçons b par $-b$ dans la relation (3) :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos(-b) - \sin(-b)\cos a$$ et (n° 214) :

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a} \qquad (4)$$

237. Calcul de tg $(a+b)$ et tg $(a-b)$.

1° En divisant membre à membre les relations (4) et (2) on a :

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

puis, en simplifiant par $\cos a \cos b$:

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\dfrac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\sin b \cos a}{\cos b \cos a}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \Longrightarrow \boxed{\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,\text{tg}\,b}} \quad (5)$$

2° En divisant membre à membre les relations (3) et (1) ou en changeant b en $-b$ dans la précédente, on trouve :

$$\text{tg}\,(a-b) = \frac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a\,\text{tg}\,b}. \qquad (6)$$

238. Conclusion. — En définitive :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \text{tg}\,(a+b) &= \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,\text{tg}\,b} \\ \hline \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \text{tg}\,(a-b) &= \frac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a\,\text{tg}\,b} \end{aligned}}$$

239. Exercices. — 1° *Calculer les fonctions circulaires de* $\frac{5\pi}{12} = 75°$ *et* $\frac{\pi}{12} = 15°$:

$75° = 45° + 30°$ et $15° = 45° - 30°$. Donc :

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1) \quad \text{et} \quad \cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

$$\sin 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1) \quad \text{et} \quad \sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

$$\text{tg}\,75° = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3} \qquad \text{et} \quad \text{tg}\,15° = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}.$$

valeurs conformes à celles de deux angles complémentaires.

2° *Calculer* tg $(a + b + c)$.

On a : $\operatorname{tg}(a + b + c) = \operatorname{tg}[(a + b) + c] = \dfrac{\operatorname{tg}(a + b) + \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} c \operatorname{tg}(a + b)}$.

En utilisant la relation (5) on trouve :

$$\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}.$$

FORMULES DE MULTIPLICATION

240. — Fonctions circulaires de l'arc 2 x. — Nous nous proposons de trouver les fonctions circulaires de l'arc $2x$ connaissant celles de l'arc x.

En remplaçant a et b par x dans les trois premières relations du n° 238 on obtient :

$$\cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x \quad \text{ou} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (1)$$

$$\sin(x + x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x \quad \text{ou} \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \quad (3)$$

En remplaçant dans (1) successivement $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$ on trouve :

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

En définitive :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \qquad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

241. Expression de $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ et $\operatorname{tg}^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \implies \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \implies \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

et par division :

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}.$$

Ainsi, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ et $\operatorname{tg}^2 x$ s'expriment rationnellement en fonction de $\cos 2x$. En remplaçant x par $\frac{a}{2}$ on obtient :

$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos a)$	$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos a)$	$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$

242. Fonctions circulaires de l'arc 3 x.

1° $\sin 3x = \sin (2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x$
$= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$
$= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$

2° $\cos 3x = \cos (2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$
$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x$
$= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$

3° $$\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{3 \sin^2 x \cos x - \sin^3 x}{\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x} = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}.$$

243. Théorème. — *Les fonctions circulaires d'un arc s'expriment rationnellement en fonction de la tangente de l'arc moitié.*

Les formules (1) et (2) du n° 238 s'écrivent, puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\cos 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \quad \text{et} \quad \sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}.$$

Divisons tous les termes de ces deux rapports par $\cos^2 x$ (simplification valable même si $\cos x$ tend vers 0); on obtient :

$$\cos 2x = \frac{1 - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \quad \text{et} \quad \sin 2x = \frac{2\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

ou : $$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{et} \quad \sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

et par division : $$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$ formule déjà connue.

En remplaçant x par $\frac{a}{2}$, on obtient :

$$\cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}; \quad \sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}; \quad \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}.$$

Posons $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = t$; nous obtenons pour $\cos a$, $\sin a$ et $\operatorname{tg} a$:

$\cos a = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$	$\sin a = \dfrac{2t}{1 + t^2}$	$\operatorname{tg} a = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

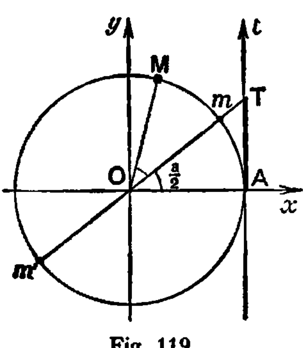


Fig. 119.

244. Interprétation géométrique. — Si on se donne $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = t = \overline{\text{AT}}$ (fig. 119), les arcs $\frac{a}{2}$ ont leurs extrémités situées en m ou m' tels que $\overset{\frown}{Am'} - \overset{\frown}{Am} = \pi + 2k\pi$. Les extrémités M et M' des arcs a seront telles que $\overset{\frown}{AM'} - \overset{\frown}{AM} = 2\pi + 4k\pi$; elles sont donc confondues; cela explique pourquoi connaissant $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ on trouve une valeur unique pour les fonctions circulaires de l'arc a.

245. Calcul de tg $\frac{a}{2}$ en fonction de sin a **et** cos a. — On peut écrire :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}.$$

Or : $2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a$; $2\cos^2\frac{a}{2} = 1 + \cos a$ et : $2\sin^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a$.

Donc :

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}}$$

Applications.

1° $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \dfrac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$

D'où : $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \operatorname{cotg}\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$; $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8} = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$

2° $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \dfrac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$

D'où : $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{cotg}\frac{5\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$; $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

TRANSFORMATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

246. Rappel. — Rappelons les formules d'addition du n° 238 :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad (1)$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \quad (2)$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (3)$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (4)$$

247. Corollaires. — En ajoutant, puis en retranchant membre à membre les relations (1) et (2), on obtient :

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b \quad (5)$$
$$\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \sin b \cos a \quad (6)$$

En ajoutant, puis en retranchant membre à membre les relations (3) et (4), on obtient de même :

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b \quad (7)$$
$$\cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \sin a \sin b \quad (8)$$

248. Transformation en produit de la somme ou de la différence de deux sinus ou de deux cosinus.

Dans les relations (5), (6), (7) et (8), posons : $a + b = p$ et $a - b = q$, ce qui entraîne : $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$; nous obtenons :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \qquad (9)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \qquad (10)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \qquad (11)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \qquad (12)$$

Ces formules permettent de transformer en produits les expressions $\sin p \pm \sin q$ et $\cos p \pm \cos q$. La formule (10) peut s'obtenir en changeant q en $-q$ dans la formule (9) et la formule (12) en changeant q en $\pi + q$ dans la formule (11). Ces formules permettent de factoriser certaines expressions trigonométriques.

249. Applications.

1° $\sin p + \cos q = \cos\left(\frac{\pi}{2} - p\right) + \cos q = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right)$.

2° $\sin p - \cos q = \cos\left(\frac{\pi}{2} - p\right) - \cos q = -2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right)$

3° $$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}}{2 \sin \frac{p+q}{2} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} = \operatorname{tg} \frac{p-q}{2} \operatorname{cotg} \frac{p+q}{2}.$$

4° $$\frac{\cos p - \cos q}{\cos p + \cos q} = \frac{-2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}} = -\operatorname{tg} \frac{p+q}{2} \operatorname{tg} \frac{p-q}{2}.$$

250. Exercice. — *Transformer l'expression: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$ en un produit de plusieurs facteurs.*

$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$ (n° 238) et $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ (n° 240).

Donc : $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin x \cos x = 2 \cos x (\sin 2x + \sin x)$

Soit : $$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \cos x \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

251. Transformation de $\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q$ et de $\operatorname{cotg} p \pm \operatorname{cotg} q$.

1° $$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q + \sin q \cos p}{\cos p \cos q}$$

soit : $$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin (p+q)}{\cos p \cos q} \qquad (13)$$

En changeant q en $-q$, on obtient :

$$\boxed{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \ \cos q}} \qquad (14)$$

2° $$\operatorname{cotg} p + \operatorname{cotg} q = \frac{\cos p}{\sin p} + \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\sin q \cos p + \sin p \cos q}{\sin p \sin q}$$

soit : $$\boxed{\operatorname{cotg} p + \operatorname{cotg} q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}} \qquad (15)$$

En changeant q en $-q$, on obtient :

$$\boxed{\operatorname{cotg} p - \operatorname{cotg} q = -\frac{\sin(p-q)}{\sin p \sin q}} \qquad (16)$$

252. Transformation en somme ou différence d'un produit de sinus ou cosinus.

Des formules (5), (7) et (8) du n° 247, on déduit :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \qquad (17)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \qquad (18)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \qquad (19)$$

En faisant $b = a$ dans ces formules, on retrouve les relations (nos 240 et 241) :

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a; \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}; \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

253. Exemples.

1° $$\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}[\sin 3x + \sin(-x)] = \frac{1}{2}[\sin 3x - \sin x]$$

$$\cos x \cos 2x = \frac{1}{2}[\cos 3x + \cos(-x)] = \frac{1}{2}[\cos 3x + \cos x]$$

$$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}[\cos(-x) - \cos 3x] = \frac{1}{2}[\cos x - \cos 3x].$$

2° $$\sin 2x \cos 3x \sin 5x = \frac{1}{2}\sin 2x[\sin 8x + \sin 2x] = \frac{1}{2}\sin 2x \sin 8x + \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

ou : $$\frac{1}{4}(\cos 6x - \cos 10x) + \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{4}(1 - \cos 4x + \cos 6x - \cos 10x).$$

3° $$4\sin^3 x = 4\sin x \sin^2 x = 2\sin x(1 - \cos 2x) = 2\sin x - 2\sin x \cos 2x$$
$$= 2\sin x - (\sin 3x - \sin x) = 3\sin x - \sin 3x.$$

254. Transformation de l'expression : $a \cos x + b \sin x$.

Nous supposons $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Il existe $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ et :

$$a \cos x + b \sin x = a [\cos x + \operatorname{tg} \varphi \sin x] = \frac{a}{\cos \varphi} [\cos x \cos \varphi + \sin \varphi \sin x].$$

En posant $\frac{a}{\cos \varphi} = r$, on obtient :

$$\boxed{a \cos x + b \sin x = r \cos (x - \varphi)}$$

Remarque. — On peut aussi chercher $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{b}$ et :

$$a \cos x + b \sin x = b [\operatorname{tg} \theta \cos x + \sin x] = \frac{b}{\cos \theta} [\sin \theta \cos x + \sin x \cos \theta].$$

En posant : $\rho = \frac{b}{\cos \theta}$:

$$\boxed{a \cos x + b \sin x = \rho \sin (x + \theta)}.$$

255. Applications.

1° $\cos x + \sin x$: on obtient : $\operatorname{tg} \varphi = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $r = \sqrt{2}$ et :

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

2° $\cos x - \sin x$: on obtient : $\operatorname{tg} \varphi = -1$; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $r = \sqrt{2}$ et

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

On en déduit :

$$\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

3° $\sqrt{3} \cos x - \sin x$: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{3}$; $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, $r = +2$ et :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \sin x - \sqrt{3} \cos x = -2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

EXERCICES

— Vérifier les identités suivantes :

847. $\cos (x + y) \cos (x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x$.

848. $\sin (x + y) \sin (x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x$.

849. $\sin (x + y) \cos (x - y) = \sin x \cos x + \sin y \cos y$.

850. $\sin (x - y) \cos (x + y) = \sin x \cos x - \sin y \cos y$.

851. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin (x + y)}{\cos x \cos y} = \frac{2 \sin (x + y)}{\cos (x + y) + \cos (x - y)}$.

852. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y} = \dfrac{2 \sin(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}.$

853. $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y = \dfrac{\sin(x + y) \sin(x - y)}{\cos^2 x \cos^2 y}.$

854. $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}.$

855. $\sin a \sin(b - c) + \sin b \sin(c - a) + \sin c \sin(a - b) = 0.$

856. $\cos a \sin(b - c) + \cos b \sin(c - a) + \cos c \sin(a - b) = 0.$

857. $\sin^2(x + y) = \sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y \cos(x + y).$

858. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = \dfrac{\sin(x + y + z)}{\cos x \cos y \cos z}.$

859. $\sin^2(x + y) + \sin^2(x - y) + 2 \sin(x + y) \sin(x - y) \cos 2x = \sin^2 2x.$

860. $\sin^2 x + \sin^2 y + \cos(x + y) \cos(x - y) = 1.$

861. $\cos^2 x + \cos^2 y - \cos(x + y) \cos(x - y) = 1.$

862. $\sin 2x - \sin 2y = 2 \cos(x + y) \sin(x - y).$

863. $2(\sin x + \cos x - 1)^2 (\sin x + \cos x + 1)^2 = 1 - \cos 4x.$

864. $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{2(\cos^2 y - \cos^2 x)}{\sin 2x - \sin 2y}.$

865. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1 - \sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}.$

866. $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}.$

867. $1 - \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \sin 2x \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\right].$

868. $\sin x = 4 \sin \dfrac{x}{3} \sin \dfrac{\pi + x}{3} \sin \dfrac{\pi - x}{3}.$

869. $(1 - 2x \cos a + x^2)(x \sin a + x^2 \sin 2a + \dots + x^n \sin na)$
$= x \sin a - x^{n+1} \sin(n + 1)a + x^{n+2} \sin na.$

870. $(1 - 2x \cos a + x^2)(1 + x \cos a + x^2 \cos 2a + \dots + x^n \cos na)$
$= 1 - x \cos a - x^{n+1} \cos(n + 1)a + x^{n+2} \cos na.$

871. 1° Démontrer la relation : $\operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x = \operatorname{tg} x.$

2° Calculer la somme suivante : $S_n = \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 2^2 \operatorname{tg} 2^2 x + \dots + 2^n \operatorname{tg} 2^n x.$

3° La somme S_n admet-elle une limite lorsque n tend vers $+\infty$?

872. On pose $\cos \dfrac{x}{2} = X$, $\sin \dfrac{x}{2} = Y$ et on donne $\cos x = a$.

1° Calculer $X^2 + Y^2$, puis $X^2 - Y^2$.

2° En déduire X et Y en fonction de $\cos x$ et placer les extrémités des arcs $\dfrac{x}{2}$ sur le cercle trigonométrique.

873. On pose $\cos \dfrac{x}{2} = X$, $\sin \dfrac{x}{2} = Y$ et on donne : $\sin x = b$.

1° Calculer $(X + Y)^2$ puis $(X - Y)^2$.

2° En déduire X et Y en fonction de $\sin x$ et placer les extrémités des arcs $\frac{x}{2}$ sur le cercle trigonométrique.

— Calculer, connaissant les fonctions circulaires de a, b, c :

874. $\sin(a+b+c)$. **875.** $\cos(a+b+c)$. **876.** $\operatorname{cotg}(a+b+c)$.

877. $\cos(a+b-c)$. **878.** $\operatorname{tg}(a+b-c)$. **879.** $\sin(a+b-c)$.

880. $\sin(2a+b)$. **881.** $\cos(2a+b)$. **882.** $\operatorname{tg}(2a+b)$.

883. Résoudre les équations : $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

— Exprimer en fonction de $\cos 2x$:

884. $1+\sin^2 x$. **885.** $1+\cos^2 x$. **886.** $\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$. **887.** $\sin^2 x \cos^2 x$.

888. $\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}$. **889.** $\frac{1+\cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$. **890.** $\operatorname{cotg}^2 x$ **891.** $\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1-\operatorname{cotg}^2 x}$.

— Exprimer en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$:

892. $2\cos x + 3\sin x - 5$. **893.** $a\cos x + b\sin x + c$. **894.** $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$.

895. $\frac{2+\sin x}{2-\sin x}$. **896.** $\frac{3+\cos x}{1+2\cos x}$. **897.** $\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$.

898. Dans un repère orthonormé xOy, deux demi-droites issues de O ont pour pentes respectives m et m'.

1° α désignant l'angle de ces demi-droites, exprimer $\operatorname{tg}\alpha$ en fonction de m et m'.

2° Quelle relation doivent vérifier m et m' pour que $\alpha = \frac{\pi}{2}$?

— Soient A, B, C les angles d'un triangle. Démontrer les relations :

899. $\sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin A$. **900.** $\cos B \cos C - \sin B \sin C + \cos A = 0$.

901. $\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}$. **902.** $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2}$.

903. $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$. **904.** $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$.

905. $\Sigma \sin A = \Sigma \sin A (\cos B + \cos C)$. **906.** $\Sigma \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C$.

907. $\sin^2 B - \sin^2 C = \sin A \sin(B - C)$. **908.** $\Sigma (\sin^2 B - \sin^2 C) \operatorname{cotg} A = 0$,

909. Démontrer pour quatre angles a, b, c, d l'équivalence :

$$a+b+c+d = 2k\pi \iff \Sigma \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \Sigma \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

910. Deux angles aigus x et y sont tels que $\cos x = \frac{8}{17}$ et $\sin y = \frac{21}{29}$.

1° Calculer $\sin x$ et $\cos y$.
2° Calculer $x + y$.

911. Deux angles aigus x et y sont tels que $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ et $\operatorname{tg} y = \frac{1}{3}$. Calculer $\operatorname{tg}(x+y)$, puis $x + y$.

912. 1° Vérifier la relation : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0.$

2° On construit 3 vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ de longueur 1, faisant avec l'axe Oz les angles respectifs x, $x + \frac{2\pi}{3}$ et $x - \frac{2\pi}{3}$. Que peut-on dire de la somme des projections de ces vecteurs sur l'axe Oz ? Interprétation géométrique.

913. Deux angles positifs x et y ont pour somme $\frac{\pi}{4}$ et sont tels que : $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3 - 2\sqrt{2}$.

1° Calculer $\operatorname{tg}(x + y)$ et en déduire $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$.

2° Calculer $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{tg} y$, puis les angles x et y.

914. Deux angles positifs x et y ont pour somme $\frac{\pi}{3}$ et sont tels que : $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

1° Calculer $\operatorname{tg}(x + y)$ et en déduire $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

2° Calculer $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{tg} y$, puis les angles x et y.

— Transformer en produits les expressions suivantes :

915. $\sin 3x + \sin 5x$.

916. $\sin 3x - \sin x$.

917. $\cos 3x + \cos 5x$.

918. $\cos 2x - \cos x$.

919. $1 - \cos 3x$.

920. $1 + \cos 2x$.

921. $1 - \sin 4x$.

922. $1 + \sin 5x$.

923. $\sin^2 5x - \sin^2 x$.

924. $\cos^2 3x - \cos^2 x$.

925. $\sin x + \sin 3x + 2\sin 2x$.

926. $\cos x + \sin 2x + \cos 3x$.

927. $\sin x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 6x$.

928. $\sin x + \sin 2x + \sin 4x - \sin 7x$.

929. $1 + \cos 2x + \cos 3x + \cos 5x$.

930. $1 - \cos 2x + \cos 3x - \cos 5x$.

931. $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c)$.

932. $\sin ax + \sin bx$.

933. $\sin ax - \sin bx$.

934. $\cos ax + \cos bx$.

935. $\cos ax - \cos bx$.

936. $1 - \cos 2nx$.

937. $1 + \cos 2nx$.

938. $1 + \sin 2nx$.

939. $1 - \sin 2nx$.

940. $\cos^2 ax - \cos^2 bx$.

941. $\sin^2 ax - \sin^2 bx$.

942. $\sqrt{3} \pm 2\cos x$.

943. $\sqrt{3} \pm 2\sin x$.

944. $2\sin x \cos x - 1$.

945. $2\sin x \cos x - \frac{1}{2}$.

946. $\sin x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 11x$.

947. $\sin 2x + \sin 3x + \sin 7x - \sin 2x$.

948. $1 - \cos 2x + \cos 4x - \cos 6x$.

949. $1 + \cos ax + \cos bx + \cos(a + b)x$.

950. $\sin x + \sin ax + \sin bx + \sin(a + b - 1)x$.

951. $\sin(a + b) - \sin a + \sin b$.

952. $\cos(a + b) - \cos a + \sin b$.

953. $\sin(a + b) + \sin a + \sin b$.

954. $\cos(a + b) + \cos a + \sin b$.

955. $1 - \sin^2 a - \sin^2 b$.

956. $\cos^2(a + b) + \cos^2(a - b) - 1$.

— Simplifier les expressions suivantes :

957. $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a + \sin b}$.

958. $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a - \sin b}$.

959. $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a + \cos b}$.

960. $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a - \cos b}$.

961. $\dfrac{\sin a - \sin b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$.

962. $\dfrac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin(a+b)}$.

963. $\dfrac{\sin(a+b) + \sin c}{\sin a + \sin(b+c)}$.

964. $\dfrac{\cos(a+b) + \cos c}{\cos a + \cos(b+c)}$.

965. $\dfrac{\sin(a+b) - \sin c}{\cos a + \cos(b+c)}$.

966. $\dfrac{\cos(a+b) - \cos c}{\sin a + \sin(b+c)}$.

967. $\dfrac{\sin(a-b)[\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b]}{\sin(a+b)[\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b]}$.

968. $\cos^2 a \cos^2 b (\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b)$.

969. $\sin^2 a \sin^2 b (\operatorname{cotg}^2 a - \operatorname{cotg}^2 b)$.

970. $\dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} 3a}{\operatorname{tg} 3a}$.

971. $\dfrac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a}$.

972. $\dfrac{\operatorname{cotg} 2a + \operatorname{cotg} a}{\operatorname{cotg} 2a - \operatorname{cotg} a}$.

973. $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$.

974. $\dfrac{\sin x + 2\sin 3x + \sin 5x}{\sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x}$.

975. Transformer en un produit l'expression suivante :

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2\cos x \cos y \cos z - 1.$$

On posera : $x + y + z = 2p$, $y + z - x = 2(p - x)$,

$x + z - y = 2(p - y)$ et $x + y - z = 2(p - z)$.

— Transformer en sommes les expressions suivantes :

976. $\sin 3x \sin 5x$.

977. $\cos 2x \cos 3x$.

978. $\sin 4x \cos 3x$.

979. $4 \sin a \sin b \sin c$.

980. $4 \sin a \sin b \cos c$.

981. $4 \cos^3 x$.

982. $\sin 15^\circ \sin 75^\circ$.

983. $\cos 15^\circ \cos 75^\circ$.

984. $4 \sin \dfrac{x}{3} \sin \dfrac{\pi + x}{3} \sin \dfrac{\pi - x}{3}$.

985. $4 \cos \dfrac{x}{3} \sin \left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{x}{3}\right) \sin \left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{x}{3}\right)$.

986. $\sin ax \,.\, \sin bx$.

987. $\cos ax \,.\, \cos bx$.

988. $\sin ax \,.\, \cos bx$.

989. $\sin ax \,.\, \sin bx \,.\, \sin cx$.

990. $\sin ax \,.\, \sin bx \,.\, \cos cx$.

991. $\sin ax \,.\, \cos bx \,.\, \cos cx$.

992. $2 \sin x \sin 2x + \cos 3x$.

993. $4 \cos \left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \cos \left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$.

994. $2 \sin x \cos 3x - \sin 4x$.

995. $2 \cos x \cos 2x - \cos 3x$.

DÉRIVÉES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

256. Théorème. — ***Lorsque** x **tend vers zéro,*** $\sin x$ ***tend vers*** 0 ***tandis que*** $\cos x$ ***tend vers*** $+1$ ***par valeurs inférieures.***

1° Quel que soit le nombre positif $\varepsilon < 1$, il existe un arc α compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ radians, tel que $\sin \alpha = \varepsilon$ (fig. 120). Pour obtenir $|\sin x| < \varepsilon$ c'est-à-dire : $\sin |x| < \sin \alpha$ il suffit de prendre $|x| < \alpha$ car la fonction $\sin x$ est croissante sur le segment $[0, \alpha]$. Donc $\sin x$ tend vers 0 en même temps que x.

2° On sait que : $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$. Lorsque x tend vers 0 il en est de même de $\frac{x}{2}$, $\sin \frac{x}{2}$ et $2 \sin^2 \frac{x}{2}$. Par suite $\cos x$ tend vers 1 à gauche.

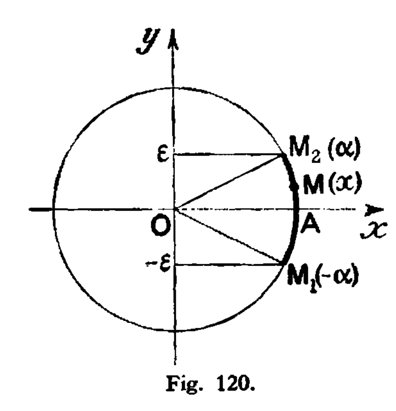


Fig. 120.

257. Corollaire. — ***Lorsque** x **tend vers** x_0, **les fonctions*** $\sin x$, $\cos x$ ***et*** $\operatorname{tg} x$ ***tendent respectivement vers*** $\sin x_0$, $\cos x_0$ ***et*** $\operatorname{tg} x_0$.

On sait que (n° 238) pour $x = x_0 + h$:

$$\sin x = \sin (x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$$
$$\cos x = \cos (x_0 + h) = \cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h.$$

Lorsque x tend vers x_0, h tend vers 0 par suite $\sin h$ tend vers zéro et $\cos h$ tend vers 1 (n° 256). Il en résulte que $\sin x$ tend vers $\sin x_0$ et que $\cos x$ tend vers $\cos x_0$.

D'autre part : $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a pour limite $\frac{\sin x_0}{\cos x_0}$, c'est-à-dire $\operatorname{tg} x_0$, si toutefois $\cos x_0 \neq 0$, donc si $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Cette limite devient $+\infty$ lorsque $x \longrightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi$ à gauche, $-\infty$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2} + k\pi$ à droite.

Il en résulte que les fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$ sont continues pour toute valeur de la variable x et que la fonction $\operatorname{tg} x$ est continue pour tout x tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (n° 87).

258. Inégalités entre x, sin x et tg x.

Sur le cercle trigonométrique, considérons l'arc $\overset{\frown}{AM}$ dont la mesure x en radians est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (fig. 121). Le point M se projette en P sur l'axe Ox et la droite OM coupe en T la tangente en A au cercle. On sait que (n° 205) :

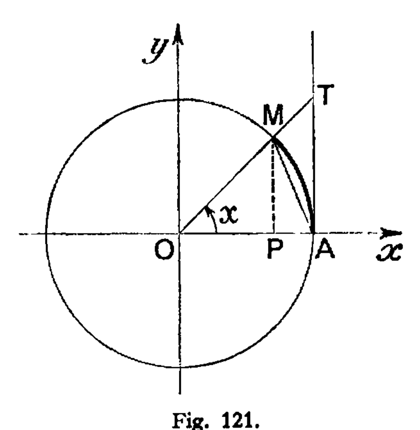


Fig. 121.

$\cos x = OP$; $\sin x = PM$; $\text{tg } x = AT$.

L'aire du secteur circulaire OAM est comprise entre celles des triangles OAM et OAT. Donc :

$$\frac{OA \times MP}{2} < \frac{OA^2 \times x}{2} < \frac{OA \times AT}{2}$$

D'où : $$\boxed{\sin x < x < \text{tg } x} \qquad (1)$$

Ainsi :

La mesure en radians d'un arc compris entre 0 *et* $\frac{\pi}{2}$ *est supérieure à celle de son sinus et inférieure à celle de sa tangente.*

259. Limite de $\frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers zéro.

1° Soit x en radians, tel que : $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Les inégalités (1) s'écrivent :

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

En divisant les trois membres de cette double inégalité par $\sin x > 0$ puis en passant aux inverses :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (2)$$

Lorsque x tend vers zéro, $\cos x$ tend vers 1 et le rapport $\frac{\sin x}{x}$, compris entre 1 et un nombre qui tend vers 1, tend lui-même vers 1.

2° Soit x en radians tel que : $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ et posons $x = -x'$, ce qui entraîne : $0 < x' < \frac{\pi}{2}$. Nous avons : $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x')}{-x'} = \frac{\sin x'}{x'}$.

Si x tend vers 0, il en est de même de x'. Le rapport $\frac{\sin x'}{x'}$ tend vers 1. Il en est de même du rapport $\frac{\sin x}{x}$. Ainsi :

260. Théorème. — ***Le rapport*** $\frac{\sin x}{x}$ ***tend vers*** 1 ***lorsque x, exprimé en radians, tend vers zéro.***

REMARQUE. — Si l'arc x est mesuré en degrés ou en grades, le dénominateur de rapport $\frac{\sin x}{x}$ est multiplié par $\frac{180}{\pi}$ ou $\frac{200}{\pi}$ (n° 193) et, lorsque x tend vers zéro, la limite de ce rapport devient $\frac{\pi}{180}$ ou $\frac{\pi}{200}$.

261. Dérivée de la fonction $y = \sin x$. — Soient x et $x + h$ les valeurs initiale et finale, en radians, de la variable. La dérivée de la fonction $y = \sin x$ est la limite, si elle existe, du rapport : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$, lorsque h tend vers zéro.

Or, (n° 248) : $\sin(x+h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$

et :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Lorsque h tend vers zéro, le rapport $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tend vers 1 (n° 260) et $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ tend vers $\cos x$ (n° 257). Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers $\cos x$.

La fonction $y = \sin x$ ***admet pour dérivée :*** $y' = \cos x$.

$$\boxed{y = \sin x} \implies \boxed{y' = \cos x}$$

262. Dérivée de la fonction $y = \cos x$. — De même, la dérivée de la fonction $y = \cos x$ est la limite de : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$, lorsque h tend vers zéro.

Or (n° 248) : $\cos(x+h) - \cos x = -2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$ et :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Lorsque h tend vers 0, le rapport $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tend vers 1 et $\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$ tend vers $\sin x$.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers $-\sin x$.

La fonction $y = \cos x$ ***admet pour dérivée :*** $y' = -\sin x$.

$$\boxed{y = \cos x} \implies \boxed{y' = -\sin x}$$

263. Dérivée de la fonction $y = \text{tg}\, x$. — C'est la dérivée du quotient $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

Donc :

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

soit : $$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2\, x. \qquad \text{(n° 209)}$$

La fonction $y = \text{tg}\, x$ ***admet pour dérivée :*** $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2\, x$.

$$\boxed{y = \text{tg}\, x} \implies \boxed{y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2\, x}$$

264. Dérivée de la fonction $y = \text{cotg}\, x$. — **On a de même :**

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{donc :} \quad y' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

soit : $$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \text{cotg}^2\, x). \qquad \text{(n° 209)}$$

La fonction $y = \text{cotg}\, x$ ***admet pour dérivée :*** $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \text{cotg}^2\, x)$.

$$\boxed{y = \text{cotg}\, x} \implies \boxed{y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \text{cotg}^2\, x)}.$$

265. Conclusion. — Les dérivées des fonctions circulaires où l'arc x est exprimé en radians sont donc :

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = \sin x & \implies y' = \cos x \\ y = \cos x & \implies y' = -\sin x \\ y = \text{tg}\, x & \implies y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2\, x \\ y = \text{cotg}\, x & \implies y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \text{cotg}^2\, x) \end{array}}$$

266. Dérivée de la fonction $y = \sin(ax + b)$. — C'est la limite de :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(ax + ah + b) - \sin(ax + b)}{h} \quad \text{lorsque } h \text{ tend vers 0.}$$

Or : $\sin(ax + ah + b) - \sin(ax + b) = 2 \sin \dfrac{ah}{2} \cos\left(ax + b + \dfrac{ah}{2}\right)$

et $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{\sin \dfrac{ah}{2}}{\dfrac{ah}{2}} \cos\left(ax + b + \frac{ah}{2}\right).$$

Si $h \to 0$: $\dfrac{\sin \frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}} \to 1$ et $\cos\left(ax + b + \frac{ah}{2}\right) \to \cos(ax + b)$.

Donc : $$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cos(ax + b).$$

On en déduit que $y = \cos(ax + b) = \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$ admet pour dérivée :

$$y' = a \cos\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right) = -a \sin(ax + b).$$

267. Théorème. — ***Les dérivées des fonctions*** $\sin(ax + b)$ ***et*** $\cos(ax + b)$ ***où*** x ***est exprimé en radians sont respectivement :*** $a \cos(ax + b)$ ***et*** $-a \sin(ax + b)$.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} y = \sin(ax + b) & \Longrightarrow & y' = a \cos(ax + b) \\ y = \cos(ax + b) & \Longrightarrow & y' = -a \sin(ax + b) \end{array}}.$$

EXEMPLES :

$y = \sin 2x \Longrightarrow y' = 2 \cos 2x$; $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Longrightarrow y' = -\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$y = \cos 3x \Longrightarrow y' = -3 \sin 3x$; $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow y' = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

268. Cas où la variable x n'est pas exprimée en radians.

1° Si x gr désigne la mesure en grades d'un arc de X radians on a : $\frac{x}{400} = \frac{X}{2\pi}$ donc : $X = \frac{\pi x}{200}$.

La dérivée par rapport à x de $y = \sin x$ gr est donc celle de $y = \sin \frac{\pi x}{200}$, soit :

$$y' = \frac{\pi}{200} \cos \frac{\pi x}{200} = \frac{\pi}{200} \cos x \text{ gr}.$$

De même $z = \cos x$ gr admet pour dérivée : $z' = -\frac{\pi}{200} \sin \frac{\pi x}{200} = -\frac{\pi}{200} \sin x$ gr.

2° On verrait de même que x degrés $= \frac{\pi x}{180}$ radians et que les dérivées de $y = \sin x^0$ et $z = \cos x^0$ sont $y' = \frac{\pi}{180} \cos x^0$ et $z' = -\frac{\pi}{180} \sin x^0$.

269. Dérivées successives des fonctions circulaires.

1° $y = \sin x \Longrightarrow y' = \cos x \Longrightarrow y'' = -\sin x$.

Donc : $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $y'' = \sin(x + \pi) \Longrightarrow y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

2° $y = \cos x \Longrightarrow y' = -\sin x \Longrightarrow y'' = -\cos x$.

Donc : $y' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $y'' = \cos(x + \pi) \Longrightarrow y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

270. Dérivées de $\sin^n x$ **et** $\cos^n x$.

On sait que $y = u^n \implies y' = nu^{n-1}u'$.

On en déduit que :

$$y = \sin^n x \implies y' = n \sin^{n-1} x \cos x$$
$$y = \cos^n x \implies y' = -n \cos^{n-1} x \sin x.$$

EXEMPLES. — $y = \sin^3 x$ admet pour dérivée $y' = 3 \sin^2 x \cos x$.
$y = \cos^5 x$ admet pour dérivée $y' = -5 \cos^4 x \sin x$.

VARIATIONS DES FONCTIONS CIRCULAIRES

271. Variations de $y = \sin x$. — La fonction $y = \sin x$ est définie et continue pour tout x (n° 257). Les relations $\sin(-x) = -\sin x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, montrent que c'est une fonction impaire et périodique de période 2π rd. Nous nous bornerons à l'étudier sur une période pour $x \in [-\pi, +\pi]$.

Sa dérivée $y' = \cos x$ est positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, négative sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ ou $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1
y	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

Dans un repère orthonormé le graphe de la fonction $y = \sin x$ complété par les translations de vecteur $\vec{V}(2\pi, 0)$ ou $-\vec{V}$ est une *sinusoïde* (fig. 122) alternativement tangente aux droites $y = 1$ pour $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $y = -1$ pour $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

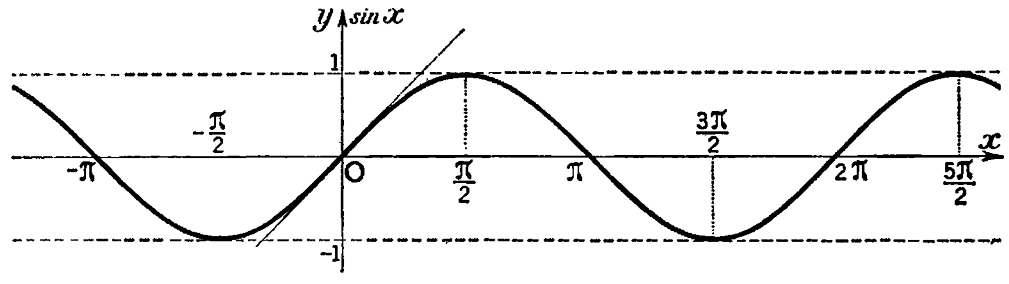


Fig. 122.

Les relations $\sin(2k\pi - x) = -\sin x$ et $\sin(2k\pi + \pi - x) = \sin x$ montrent que tous les points $(k\pi, 0)$ sont des centres de symétrie et toutes les droites $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sont des

axes de symétrie. La relation $y'' = -\sin x = -y$ montre que les centres de symétrie sont des points d'inflexion de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur ± 1 car $y'' = y = 0 \Longrightarrow y' = \pm 1$.

272. Variations de $y = \cos x$. — La fonction $y = \cos x$ est également pour tout x, définie, continue et périodique de période 2π. La relation $\cos(-x) = \cos x$ montre que c'est une fonction paire que nous étudierons sur $[-\pi, +\pi]$. Comme $y' = -\sin x$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'	0	$+$	$+1$	$+$	0	$-$	-1	$-$	0
y	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

La relation $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ montre que la courbe $y = \cos x$ se déduit de la courbe $y = \sin x$ par la translation de vecteur $\vec{U}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. C'est encore une *sinusoïde* (fig. 123) admettant cette fois les points $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$ pour centres de symétrie et les droites $x = k\pi$ pour axes de symétrie.

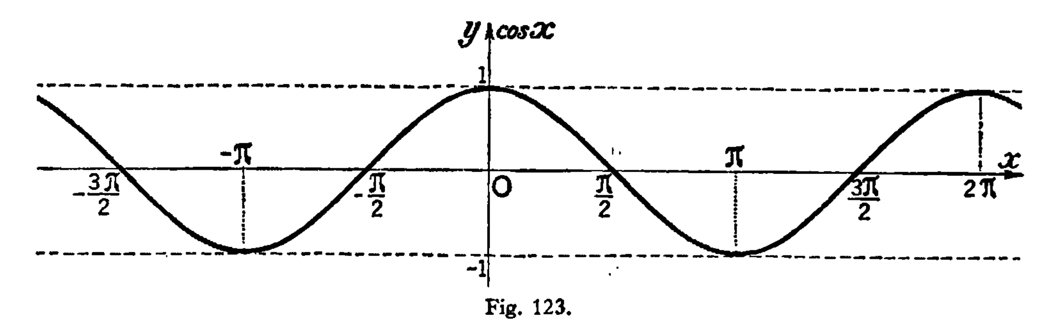


Fig. 123.

273. Variations de $y = \operatorname{tg} x$. — La fonction $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est définie et continue pour tout x tel que $\cos x \neq 0$ c'est-à-dire pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Les relations : $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ montrent que c'est une fonction impaire de période π. Nous l'étudierons sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, intervalle où elle est continue. Comme $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ la fonction $\operatorname{tg} x$ est croissante sur chacun des intervalles où elle est définie :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$
y'		$+$	1	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

La courbe $y = \operatorname{tg} x$ admet donc les droites $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour asymptotes verticales et la relation $\operatorname{tg}(k\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ montre que tous les points $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$ sont des centres de symétrie de la courbe (fig. 124). Notons que $y'' = 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg} x$ est du signe de $\operatorname{tg} x$. Les points de rencontre de la courbe avec Ox sont des points d'inflexion où la tangente a pour coefficient directeur $+ 1$.

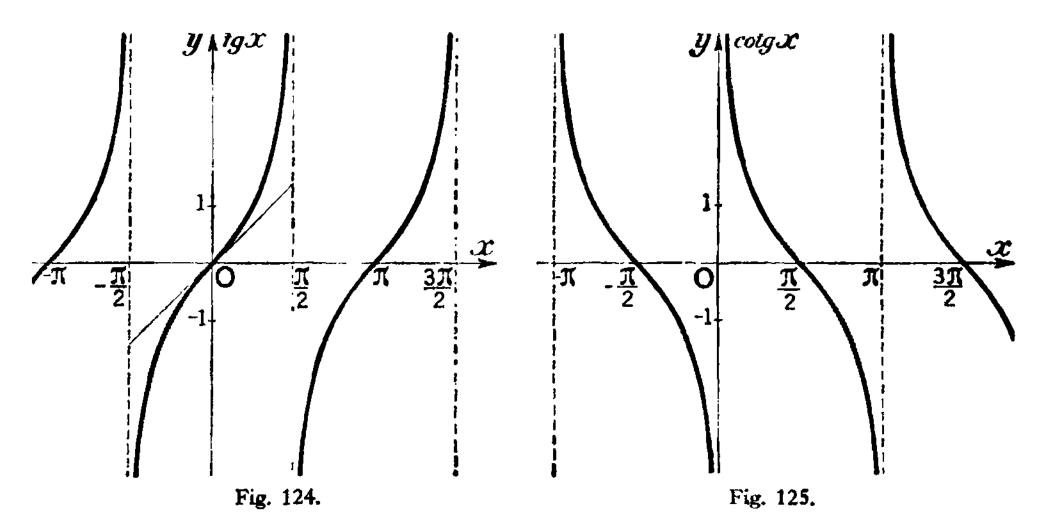


Fig. 124. Fig. 125.

274. Variations de $y = \operatorname{cotg} x$. — La fonction $y = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ est définie et continue pour tout x tel que $\sin x \neq 0$ c'est-à-dire pour $x \neq k\pi$. Les relations $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$ et $\operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg} x$, montrent que c'est une fonction impaire de période π. Nous l'étudierons sur $]0, \pi[$, intervalle sur lequel elle est continue. Sa dérivée

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$$

est négative sur tout intervalle où $\operatorname{cotg} x$ est continue.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'		$-$	-1	$-$	
	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

La relation $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ montre que les graphes des deux fonctions $y = \operatorname{cotg} x$ et $y = \operatorname{tg} x$ sont, dans un repère rectangulaire, symétriques par rapport à la droite $x = +\frac{\pi}{4}$.

La courbe $y = \operatorname{cotg} x$ (fig. 125) admet pour asymptotes verticales les droites $x = k\pi$ et pour centres de symétrie tous les points $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$. Comme $y'' = 2(1 + \operatorname{cotg}^2 x)\operatorname{cotg} x$ est du signe de $\operatorname{cotg} x$, tous les points $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$ où la courbe rencontre Ox sont des points d'inflexion où la tangente a pour coefficient directeur $- 1$.

275. Variation de $y = \sin(ax + b)$ et de $z = \cos(ax + b)$. — La période commune est $T = \frac{2\pi}{a}$. On peut supposer $a > 0$ car : $\sin(-ax + b) = -\sin(ax - b)$ et $\cos(-ax + b) = \cos(ax - b)$. Bornons à une période, en prenant $x \in \left[-\frac{\pi}{a} - \frac{b}{a} ; \frac{\pi}{a} - \frac{b}{a}\right]$.

On obtient les tableaux de variation suivants :

x	$-\frac{\pi}{a} - \frac{b}{a}$		$-\frac{\pi}{2a} - \frac{b}{a}$		$-\frac{b}{a}$		$\frac{\pi}{2a} - \frac{b}{a}$		$\frac{\pi}{a} - \frac{b}{a}$
$u = x + \frac{b}{a}$	$-\frac{\pi}{a}$		$-\frac{\pi}{2a}$		0		$\frac{\pi}{2a}$		$\frac{\pi}{a}$
$X = ax + b$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$y = \sin(ax + b)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0
$z = \cos(ax + b)$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

Les graphes de ces fonctions sont des sinusoïdes. On peut les obtenir en faisant subir aux graphes de $y = \sin X$ et de $y = \cos X$ l'affinité orthogonale d'axe $y'y$ et de rapport $\frac{1}{a}$, puis la translation de vecteur parallèle à $x'x$ et de mesure $-\frac{b}{a}$.

EXERCICES

— Trouver, lorsque x en radians tend vers zéro, la limite des expressions suivantes :

996. $\frac{\sin 3x}{x}$.

997. $\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

998. $\sin 2x \operatorname{cotg} 3x$.

999. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}$.

1000. $\frac{\sin x + \cos x - 1}{x}$.

1001. $\frac{\sin^2 x \cos^2 x}{1 - \cos x}$.

— Trouver, lorsque x en radians tend vers $\frac{\pi}{2}$, la limite des expressions suivantes $\left(\text{on posera } \frac{\pi}{2} - x = \alpha\right)$:

1002. $\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$.

1003. $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$.

1004. $\frac{\sin 2x}{\cos 3x}$.

1005. $\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x$.

1006. $\frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$.

1007. $(1 - \sin x) \operatorname{tg}^2 x$.

— Trouver, lorsque x en radians tend vers $\frac{\pi}{4}$, la limite des expressions suivantes : $\left(\text{on posera } \frac{\pi}{4} - x = \alpha\right)$:

1008. $\frac{\sqrt{2}\,(\cos x - \sin x)}{\pi - 4x}$. **1009.** $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$.

1010. $\frac{\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^3}{(\sin x - \cos x)^2}$.

— Calculer la dérivée des fonctions suivantes (où x est en radians) :

1011. $\frac{1}{\sin x}$. **1012.** $\frac{1}{\cos x}$. **1013.** $\sin x + \cos x$.

1014. $\sin^2 x$. **1015.** $\cos^2 x$. **1016.** $\sin x \cos x$.

1017. $x - \sin x \cos x$. **1018.** $\cos x\,(3 - \cos^2 x)$. **1019.** $x + \operatorname{cotg} x$.

1020. $2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$. **1021.** $2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$.

1022. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$. **1023.** $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

1024. $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + x \operatorname{tg} x}$. **1025.** $\frac{1 - x \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} x}$.

1026. $\frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$. **1027.** $\frac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x}$.

1028. $y = \sin^7 x$. **1029.** $y = \cos^5 x$. **1030.** $y = \operatorname{tg}^3 x$.

1031. $y = \sin^n x$. **1032.** $y = \cos^n x$. **1033.** $y = \operatorname{tg}^n x$.

1034. $y = \frac{1}{\sin^6 x}$. **1035.** $y = \frac{1}{\cos^7 x}$. **1036.** $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}$.

1037. 1° Montrer que la dérivée de $\sin(x + a)$ est $\sin\left(x + a + \frac{\pi}{2}\right)$.

2° En déduire les dérivées successives de $y = \sin x$ et montrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ est :

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Démontrer de même que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $y = \cos x$ est :

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

— Calculer les dérivées des fonctions suivantes (x en radians) :

1038. $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x$.

1039. $\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 4x$.

1040. $\sin^6 x + \cos^6 x + \sin^4 x + \cos^4 x + 5 \sin^2 x \cos^2 x$.

1041. $\sin^8 x + \cos^8 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^4 x \cos^4 x$.

1042. $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$. **1043.** $\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$.

1044. $x - \operatorname{tg} x$; $ax - \sin ax \cos ax$; $x \sin x + \cos x$.

1045. $\sin^3 x + \cos^3 x$; $\sin nx\,(\sin x)^n$; $\dfrac{\sin^p x}{\cos^q x}$.

1046. On donne les fonctions : $u = a\cos x + \cos ax$ et $v = a\sin x + \sin ax$.

Calculer et factoriser $u', v', u'^2 + v'^2$ et $\dfrac{u'}{v'}$.

1047. Même problème avec les fonctions : $u = a\cos x - \cos ax$ et $v = a\sin x - \sin ax$.

1048. Soit la fonction : $y = \sin^n x$.
1° Calculer y' et y''.
2° Montrer que : $y'' + n^2 y = n(n-1)\sin^{n-2} x$.
3° Trouver une relation analogue pour la fonction : $z = \cos^n x$.

1049. 1° On donne : $y = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ (x en radians). Calculer les dérivées y' et y'' de y par rapport à x.
2° Former une relation indépendante de x entre y et y', puis entre y et y''.

1050. 1° On donne la fonction : $y = x\sin x + \cos x$ (x en radians). Calculer les dérivées y' et y'' de y par rapport à x.
2° Former entre x, y, y', y'' une relation ne contenant pas de fonctions circulaires.

— Variation et graphe des fonctions suivantes où la variable x est exprimée en radians :

1051. $y = 2 + \sin x$ **1052.** $y = 3 - \cos x$ **1053.** $y = \operatorname{tg} x - 1$.

1054. $y = \sin 2x$. **1055.** $y = -\cos^3 x$. **1056.** $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$.

1057. $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. **1058.** $y = \cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$. **1059.** $y = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

1060. $y = 4\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{5}\right)$. **1061.** $y = -\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$. **1062.** $y = 4\sin\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

1063. $y = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$; **1064.** $y = \dfrac{2 + \cos x}{2\cos x - 1}$; **1065.** $y = \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

1066. Déterminer les coefficients a, b, c pour que la fonction : $y = a\sin x + b\cos x + c$ s'annule pour $x = \dfrac{\pi}{6}$ et atteigne pour $x = \dfrac{\pi}{3}$ un minimum égal à un nombre donné m.

Construire le graphe de cette fonction lorsque $m = -1$.

LA DROITE (REPÈRE QUELCONQUE)

276. Théorème. — ***Toute droite du plan a une équation de la forme :*** $ax + by + c = 0$, ***où les coefficients*** a ***et*** b ***ne sont pas tous deux nuls.***

Soit un repère cartésien xOy, non nécessairement normé, c'est-à-dire où les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ des axes Ox et Oy peuvent être de modules différents.

Considérons (fig. 126) la droite D passant par le point $M_0(x_0; y_0)$ et parallèle au vecteur $\overrightarrow{OP}$ de composantes scalaires α et β. Pour que le point $M(x, y)$ appartienne à la droite D, il faut et il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$ et $\overrightarrow{OP}$ soient parallèles, donc que leurs composantes scalaires soient proportionnelles. Or les composantes du vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ sont $X = x - x_0$ et $Y = y - y_0$. En supposant α et β tous deux différents de zéro, l'équation de la droite D est donc :

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - x_0}{\beta} \quad \text{soit} \quad \boxed{\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0}. \qquad (1)$$

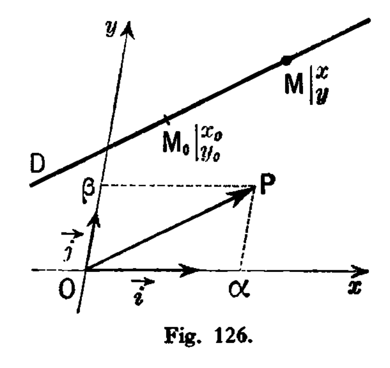


Fig. 126.

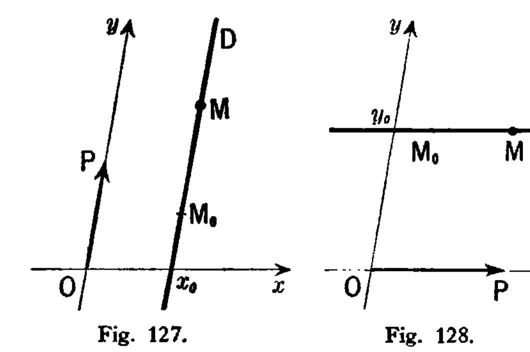


Fig. 127. Fig. 128.

Cette équation reste valable si l'une ou l'autre des composantes de $\overrightarrow{OP}$ devient nulle. En effet si $\alpha = 0$, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est porté par Oy (fig. 127) et l'équation (1) se réduit à $\beta(x - x_0) = 0$ ou $x - x_0 = 0$. C'est l'équation de la parallèle à Oy menée par le point M_0.

De même si $\beta = 0$, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est porté par Ox (fig. 128) et l'équation (1) se réduit à $-\alpha(y - y_0) = 0$ ou $y - y_0 = 0$. C'est l'équation de la parallèle à Ox menée par M_0.

Or l'équation (1) s'écrit : $\beta x - \alpha y - \beta x_0 + \alpha y_0 = 0$.

Elle est donc de la forme : $\boxed{ax + by + c = 0}$ (2)

en posant : $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = -\beta x_0 + \alpha y_0$.

EXEMPLE. — La droite D, passant par le point M_0 (— 3; + 2) et parallèle au vecteur de composantes — 1 et + 4 a pour équation :

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{+4} \iff 4x + y + 10 = 0.$$

277. Réciproque. — ***Toute équation de la forme*** $ax + by + c = 0$ ***où*** a ***et*** b ***ne sont pas tous deux nuls, est l'équation d'une droite parallèle au vecteur de composantes —*** b ***et*** a :

Désignons par M_0 (x_0, y_0) un point dont les coordonnées vérifient l'équation proposée et par M (x, y) un point quelconque du plan (fig. 129). Compte tenu de la relation $ax_0 + by_0 + c = 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ s'écrit :

$$ax + by + c - (ax_0 + by_0 + c) = 0$$

soit :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

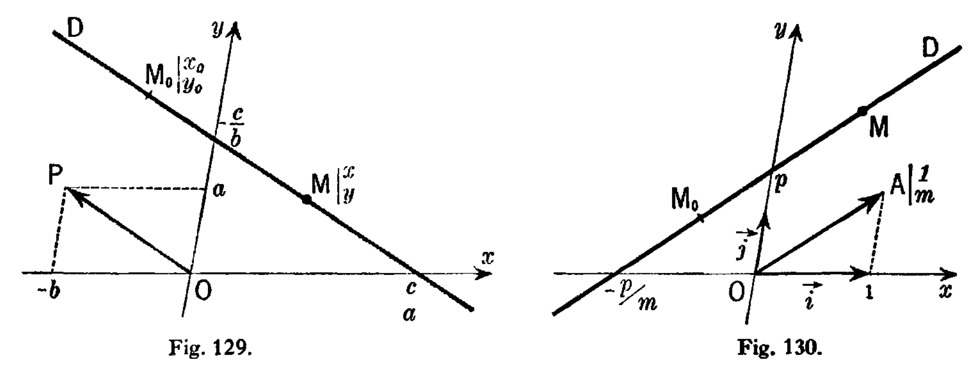


Fig. 129. Fig. 130.

En posant $\alpha = -b$ et $\beta = a$, on retrouve la relation (1) du paragraphe précédent : $\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$, qui exprime que le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est parallèle au vecteur $\overrightarrow{OP}$ (α, β), soit $\overrightarrow{OP}$ $(-b, a)$. Le lieu du point M (x, y) est donc la droite D passant par M_0 et parallèle à $\overrightarrow{OP}$.

REMARQUES. — 1° Si a et b sont tous deux différents de 0 (fig. 129), la droite D coupe Ox au point A $\left(x = -\frac{c}{a}, y = 0\right)$ et coupe Oy au point B $\left(x = 0, y = -\frac{c}{b}\right)$.

2° Si $a = 0$, la droite D est parallèle à Ox d'ordonnée $y = -\frac{c}{b}$.

3° Si $b = 0$, la droite D est la parallèle à Oy d'abscisse $x = -\frac{c}{a}$.

278. Équation réduite d'une droite. — Lorsque b n'est pas nul l'équation $ax + by + c = 0$ est équivalente à : $y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$.

En posant : $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$, elle devient :

$$\boxed{y = mx + p} \iff \frac{x}{1} = \frac{y - p}{m}. \qquad (3)$$

C'est l'équation d'une droite (fig. 130) issue de B $(0, p)$ et parallèle au vecteur $\overrightarrow{OA}$ $(1, m)$. Si la droite D passe par O, son équation se réduit à : $y = mx$.

Toute fonction du premier degré est représentée graphiquement par une droite.

279. Coefficient directeur d'une droite. — Les coefficients m et p de l'équation de la droite : $y = mx + p$ se nomment respectivement *coefficient directeur* et *ordonnée à l'origine* de la droite.

La droite D issue de M_0 (x_0, y_0), parallèle au vecteur $\overrightarrow{OP}$ (α, β) a pour équation (n° 276) :

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \text{ ou } ax + by + c = 0 \text{ avec } a = \beta \text{ et } b = -\alpha.$$

Son coefficient directeur est (n° 278) : $m = -\frac{a}{b} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$.

Or, $x - x_0$ et $y - y_0$ sont les accroissements respectifs Δx et Δy de x et y lorsqu'on passe de M_0 à M :

Le coefficient directeur d'une droite est égal au rapport des accroissements correspondants de y et de x entre deux points quelconques de cette droite :

$$\boxed{m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Notons que m est aussi la *dérivée* de la fonction $y = mx + p$ par rapport à la variable x.

REMARQUES. — Considérons la droite d'équation générale $ax + by + c = 0$:

1° Si a tend vers zéro (avec $b \neq 0$) la droite devient parallèle à Ox et son coefficient directeur $m = -\frac{a}{b}$ tend vers zéro.

2° Si b tend vers zéro (avec $a = 0$,) le coefficient directeur tend vers l'infini et la droite devient parallèle à Oy.

280. Droites de même direction. — 1° Soient (fig. 131) deux droites D et D', non parallèles à Oy et d'équations respectives : $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

Elles sont respectivement parallèles aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ $(1; m)$ et $\overrightarrow{OA'}$ $(1; m')$.

Pour qu'elles aient même direction, il faut et il suffit que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ soient confondus, donc que $m = m'$.

Pour que deux droites aient même direction, il faut et il suffit qu'elles aient même coefficient directeur.

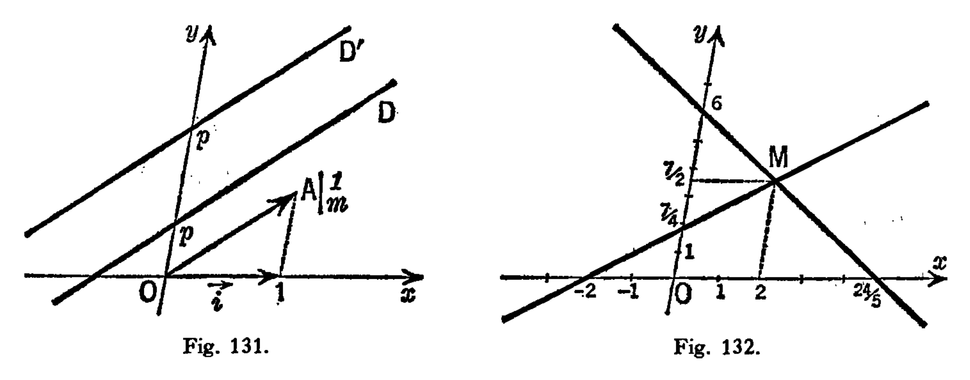


Fig. 131. Fig. 132.

Si $p \neq p'$, les droites D et D' sont alors parallèles. Si $p = p'$ elles sont confondues.

Ainsi les droites d'équations : $y = 2x - 5$ et $y = 2x + 3$ sont parallèles toutes deux à la droite d'équation : $y = 2x$.

2° Les droites D et D' : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ ont pour coefficients directeurs : $m = -\frac{a}{b}$; $m' = -\frac{a'}{b'}$, et pour ordonnées à l'origine : $p = -\frac{c}{b}$; $p' = -\frac{c'}{b'}$.

Pour qu'elles aient même direction, il faut et il suffit que :

$$m = m' \iff \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \iff \boxed{a'b - ab' = 0}.$$

Dans ces conditions :

Si $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}$ les droites D et D' sont parallèles car $p \neq p'$.

Si $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ les droites D et D' sont confondues car $p = p'$.

Ainsi les droites : $2x - 3y + 1 = 0$ et $4x - 6y + 5 = 0$ sont parallèles.
En particulier les droites : $ax + by + c = 0$ et $ax + by + \lambda = 0$ sont parallèles.

281. Intersection de deux droites. — Soient les deux droites D et D' d'équations respectives :

$$\begin{cases} ax + bx + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0. & (2) \end{cases}$$

Il résulte du n° 280 que si $\frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b}$, ces deux droites n'ont pas même direction et sont donc concourantes en M (x, y). Les coordonnées de ce point vérifient chacune des équations (1) et (2) et constituent la solution du système formé par ces deux équations.

Ainsi (fig. 132) les droites D et D' : $7x - 8y + 14 = 0$ et $5x + 4y - 24 = 0$ se coupent en M dont les coordonnées sont solution du système :

$$\begin{cases} 7x - 8y + 14 = 0 \\ 5x + 4y - 24 = 0 \end{cases} \quad \text{ce qui donne : } x = 2 \text{ et } y = \frac{7}{2}.$$

APPLICATIONS

282. Droite définie par un point et sa direction.

1° ***Droite de coefficient directeur donné*** m, ***issue du point*** $M_0 (x_0; y_0)$.

Si M (x, y) désigne, dans un repère cartésien quelconque, un point courant de la droite cherchée (fig. 133), on sait (n° 279) qu'entre $M_0(x_0, y_0)$ et M (x, y) :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

L'équation de la droite cherchée est :

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}.$$

Exemple. — La droite passant par M_0 (+ 1; − 3) et de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ a pour équation :

$$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \iff x + 2y + 5 = 0.$$

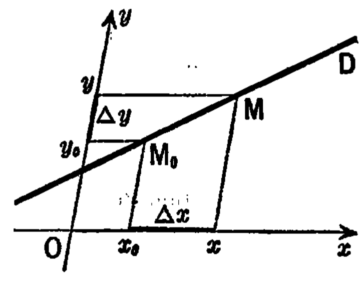


Fig. 133.

2° ***Droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.*** Soit la droite D passant par le point M_0 $(x_0; y_0)$ et parallèle à la droite Δ d'équation $ax + by + c = 0$.

L'équation de la droite D est de la forme (n° 280) : $ax + by + \lambda = 0$.

Écrivons qu'elle passe par M_0 $(x_0; y_0)$:

$$ax_0 + by_0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -(ax_0 + by_0)$$

L'équation de la droite D est donc :

$$ax + by - ax_0 - by_0 = 0 \iff \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}.$$

Exemple. — La droite D passant par M_0 $\left(-3; +\frac{1}{2}\right)$ et parallèle à la droite Δ d'équation : $-2x + 3y - 1 = 0$ a pour équation :

$$-2(x + 3) + 3\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff -2x + 3y - \frac{15}{2} = 0.$$

283. Droite passant par deux points. — Soient les points donnés M_1 $(x_1; y_1)$ et M_2 $(x_2; y_2)$ (fig. 134). Pour que le point M $(x; y)$ appartienne à la droite M_1M_2, il faut et il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ aient même direction, donc que leurs composantes scalaires soient proportionnelles. L'équation de la droite M_1M_2 est donc :

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}.$$

La valeur commune de ces deux rapports est le coefficient directeur m de la droite M_1M_2.

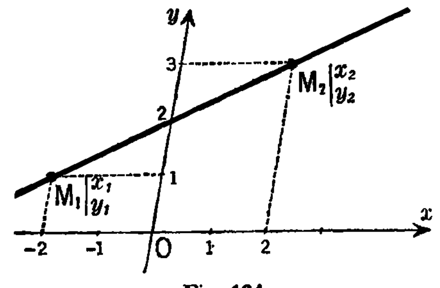


Fig. 134.

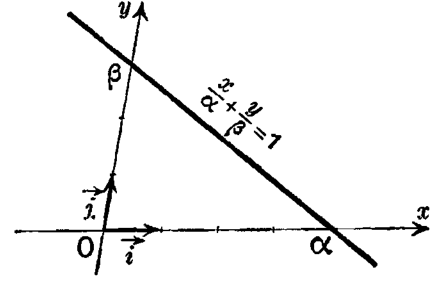


Fig. 135.

Exemple. — La droite définie par M_1 $(-2; +1)$ et M_2 $(+2; +3)$ a pour équation :

$$\frac{y - 1}{x + 2} = \frac{3 - 1}{2 + 2} = \frac{1}{2} \iff x - 2y + 4 = 0.$$

284. Cas particulier. — ***Droite joignant un point de x'x à un point de yy'.*** Considérons (fig. 135) la droite qui joint A $(\alpha;0)$ et B $(0; \beta)$. Son équation est (n° 283) :

$$\frac{y - 0}{x - \alpha} = \frac{\beta - 0}{0 - \alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Soit : $$-\alpha y = -\beta x + \alpha\beta \iff \beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0.$$

Cette équation s'écrit, puisqu'on suppose α et β non nuls :

$$\boxed{\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0}.$$

Ainsi la droite qui joint les points A (+ 4; 0) et B (0; + 3) a pour équation :

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 = 0 \iff 3x + 4y - 12 = 0.$$

285. Résolution graphique d'un système de deux équations du 1er degré.

Considérons le système d'équations : (I) $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c'. & (2) \end{cases}$

Soient D et D' les droites d'équations (1) et (2) dans un repère quelconque.

Le point M (x, y) (s'il existe) commun à ces deux droites (fig. 132) a des coordonnées solutions du système (I). Réciproquement, toute solution $(x; y)$ du système (I) a pour point représentatif le point commun aux droites D et D'.

1° *Cas général.* Si $ab' - a'b \neq 0$, les droites D et D' n'ont pas même direction (n° 280). Les droites D et D' ont un point commun M, et un seul. Le système (I) admet une solution unique. On sait que cette solution est donnée par les formules de *Cramer* :

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

2° Si $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}$, les droites D et D' sont parallèles (n° 280). Les droites D et D' n'ont aucun point commun. Le système (I) est *impossible*.

3° Si $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, les droites D et D' sont confondues. Le système (I) admet une infinité de solutions. Il est *indéterminé*.

On retrouve les résultats obtenus dans le Cours d'Algèbre.

286. Signe de l'expression du premier degré : $ax + by + c$.

Le signe de l'expression $E_M = ax + by + c$ dépend des valeurs numériques attribuées aux variables x et y, donc de la position du point M (x, y) dans un repère donné (fig. 136).

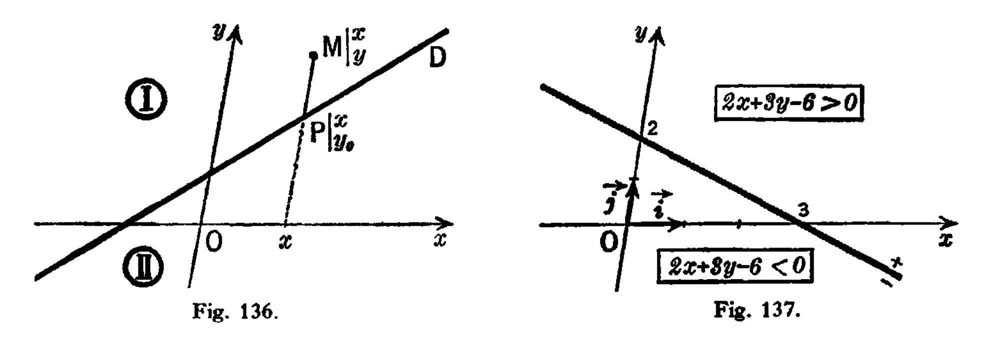


Fig. 136. Fig. 137.

Pour que l'expression E soit nulle il faut et il suffit que M (x, y) appartienne à la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$. Si M n'appartient pas à la droite (D), désignons par P le point de la droite (D) de même abscisse x que le point M et soit y_0 son ordonnée, ce qui nécessite : $ax + by_0 + c = 0$. Alors, pour M (x, y) :

$$E_M = ax + by + c = (ax + by + c) - (ax + by_0 + c) = by - by_0.$$

Soit : $$E_M = b(y - y_0) = b \cdot \overline{PM}.$$

Il en résulte que l'expression E est du signe de b si $\overline{PM}$ est positif, c'est-à-dire si M appartient à la région du plan (I), au-dessus de la droite (D). Elle est du signe opposé si $\overline{PM}$ est négatif, c'est-à-dire si M appartient à la région (II), au-dessous de la droite (D) :

L'expression $ax + by + c$ est positive en tout point de l'un des demi-plans limités par la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et négative en tout point de l'autre demi-plan.

Pour distinguer ces deux régions, on cherche le signe de E correspondant à un point particulier de l'une de ces régions. Dans le cas où $c \neq 0$, on utilise l'origine. En ce point $E_M = c$.

L'expression $ax + by + c$ est du signe de c dans la région qui contient l'origine des coordonnées.

Ainsi l'expression $2x + 3y - 6$ est négative dans la région limitée par la droite $2x + 3y - 6 = 0$ qui contient l'origine O (fig. 137). Elle est positive dans l'autre (placer un signe + et un signe — de part et d'autre de la droite.)

287. Résolution graphique de l'inéquation : $ax + by + c > 0$.

Il s'agit de trouver l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient l'inégalité : $ax + by + c > 0$. On trace la droite $ax + by + c = 0$ et on détermine le signe de l'expression $ax + by + c$ dans chacun des demi-plans obtenus. On couvre de hachures la région qui ne convient pas.

Ainsi pour obtenir les points du plan (fig. 137) dont les coordonnées vérifient l'inéquation $2x + 3y - 6 > 0$ il faudra couvrir de hachures la région négative qui contient l'origine O et conserver la région positive située au-dessus de la droite $2x + 3y - 6 = 0$.

EXERCICES

— Former l'équation d'une droite passant par A $(x_0; y_0)$ et parallèle à un vecteur $\vec{V}$ donné dans les cas suivants :

1067. A $(-1; +1)$ et $\vec{V}$ $(2; 3)$.
1068. B $(1; -3)$ et $\vec{V}$ $(-1; +2)$.
1069. A $(-3; +2)$ et V $(-1; -2)$
1070. A $(+3; -2)$ et $\vec{V}$ $(-2; -3)$.
1071. A $(0; 2)$ et $\vec{V}$ $(2; 5)$.
1072. A $(4; 0)$ et $\vec{V}$ $(-1; 4)$.
1073. A $(0; 0)$ et $\vec{V}$ $(1; -2)$.
1074. A $(0; 4)$ et $\vec{V}$ $(1; 4)$.
1075. A $(-3; 0)$ et $\vec{V}$ $(1; -2)$.
1076. A $(-1; -1)$ et $\vec{V}$ $(1; 1)$.

— Construire, dans un repère cartésien donné, les droites définies par les équations suivantes

1077. $y = 3x$.
1078. $y = -2x$.
1079. $x = 3y$.
1080. $y = x + 3$.
1081. $x = y - 4$.
1082. $y = -5x + 7$.
1083. $3x - 2y + 6 = 0$.
1084. $5x - 7y + 35 = 0$.
1085. $2x - 3y + 24 = 0$.

— Équation d'une droite passant par A $(x_0; y_0)$ et du coefficient directeur m dans les cas suivants :

1086. A $(-1; +2)$; $m = \frac{3}{4}$.
1087. A $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$; $m = -\frac{1}{3}$.
1088. A $\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$; $m = \frac{4}{3}$.
1089. A $(+5; -2)$; $m = +3$.
1090. A $(4; 0)$; $m = -1$.
1091. A $(0; 5)$; $m = -2$.

— **Équations d'une droite passant par A $(x_0; y_0)$ et parallèle à une droite D donnée, dans les cas suivants :**

1092. A (1 ; 3) $\quad$ D : $3x - y + 4 = 0$.

1093. A (− 3 ; + 2) $\quad$ D : $x + 2y + 1 = 0$.

1094. A $\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$ $\quad$ D : $4y + 3y - 1 = 0$.

— **Équation de la droite qui joint deux points A et B dans les cas suivants :**

1095. A $\left(+\frac{5}{2}; 0\right)$ et B (0; 4).

1096. A (− 4; 0) et B $\left(0; +\frac{2}{3}\right)$.

1097. A (− 1; + 4) et B (− 4; − 7).

1098. A (− 3; − 12) et B (+ 2; + 7).

1099. A $\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{5}\right)$ et B $\left(1; \frac{4}{7}\right)$.

1100. A $\left(-\frac{2}{3}; 1\right)$ et B $\left(-\frac{3}{4}; \frac{4}{5}\right)$.

— **Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants :**

1101. $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ x + 3y = -7. \end{cases}$

1102. $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x - 3y = 17. \end{cases}$

1103. $\begin{cases} 4x - 10y = -27 \\ 2x - 14y = -36. \end{cases}$

1104. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x - 6y = -17. \end{cases}$

1105. $\begin{cases} 6x - 3y = -26 \\ 15x + 2y = -27. \end{cases}$

1106. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x - 2y = -31. \end{cases}$

— **Interpréter graphiquement les systèmes d'inéquations suivants :**

1107. $\begin{cases} x + y - 3 > 0 \\ x - y + 4 < 0 \\ x - 4 > 0. \end{cases}$

1108. $\begin{cases} 2x - 3y + 6 > 0 \\ 4x - y - 4 < 0 \\ 4x + 3y + 12 > 0. \end{cases}$

1109. $\begin{cases} 2x - y + 5 < 0 \\ 2x + y + 7 < 0 \\ 3 - y > 0. \end{cases}$

1110. $\begin{cases} 5x - 2y + 10 < 0 \\ 7x - 2y + 14 > 0 \\ 2x + y - 5 < 0. \end{cases}$

1111. Montrer que les droites définies par les trois équations suivantes ont un point commun dont on calculera les coordonnées :

$$3x - 2y - 14 = 0$$
$$5x - 4y - 26 = 0$$
$$x - 7y - 30 = 0$$

1112. Déterminer m pour que les trois droites définies par les équations suivantes aient un point commun :

$$3x - 4y + 15 = 0$$
$$5x + 2y - 1 = 0$$
$$mx - (2m - 1)y + 9m - 13 = 0$$

1113. On donne les droites d'équations :

$$m^2x + my = p$$
$$p^2(x + y) = m$$

1° Déterminer m pour que ces droites aient même direction.

2° Déterminer m et p pour qu'elles soient confondues.

1114. On donne les droites d'équations :

$$x + m^2y = p$$
$$x + y = mp^2$$

1° Déterminer m pour que ces droites aient même direction.

2° Déterminer m et p pour qu'elles soient confondues.

— Montrer que, quel que soit m, les droites définies par les équations suivantes passent par un point fixe dont on calculera les coordonnées :

1115. $(3x - 2y + 5) + m(x - 2y + 4) = 0$.

1116. $(2m - 3)x + (7 - 2m)y + 4 = 0$.

1117. $mx + (5m - 3)y + 9 - 13m = 0$.

1118. $(m^2 - 1)x + (3m^2 - 2m + 1)y - 5m^2 + 4m - 3 = 0$.

1119. Dans un repère quelconque xOy on donne les points A (6; 0) et B (0; 4).

1° Former les équations des médianes du triangle OAB.

2° Montrer qu'elles sont concourantes en un point G dont on calculera les coordonnées.

1120. Dans un repère quelconque xOy on donne les points A (8; 0); B (0; 5); C (3; 0) et D (0; 4). Les droites AB et CD se coupent en E.

1° Calculer les coordonnées de E puis celles des milieux des segments AD; BC et OE.

2° Vérifier que les milieux de ces trois segments sont alignés.

1121. Dans un repère quelconque xOy, on donne les points B $(a; 0)$, C $(-a; 0)$ et A $(0; b)$. Une droite variable de coefficient directeur m passe par l'origine et coupe les droites AB et AC respectivement en M et N.

1° Déterminer les coordonnées des points M et N.

2° Former les équations des droites CM et BN et calculer les coordonnées de leur point commun P.

3° Trouver le lieu du point P lorsque m varie.

1122. Dans un repère xOy on considère le point fixe K $(a; b)$. Une droite variable issue de K et de coefficient directeur m coupe les axes $x'x$ et $y'y$ respectivement en A et B. La droite qui joint A au milieu de OK coupe l'axe $y'y$ en C et la parallèle menée par C à la droite OK coupe la droite AB en M.

1° Calculer en fonction de a, b et m les coordonnées des points A, B et C.

2° Calculer les coordonnées du point M et trouver le lieu du point M en calculant le coefficient directeur de OM.

LA DROITE (REPÈRE ORTHONORMÉ)

288. Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs. — Rappelons que dans un repère orthonormé xOy, les vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont rectangulaires et ont pour module 1. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{U}$ (X, Y) et $\vec{V}$ (X′, Y′) a pour expression analytique (nº 178) :

$$\boxed{\vec{U} \cdot \vec{V} = XX' + YY'}.$$

Pour que deux vecteurs du plan soient rectangulaires il faut et il suffit que leur produit scalaire soit nul.

Pour $\vec{U}$ et $\vec{V}$ non nuls : $\vec{U} \perp \vec{V} \iff \vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \iff \boxed{XX' + YY' = 0}$.

289. Distance de deux points. — Soient, dans un repère orthonormé, les points A et B de coordonnées respectives $(x_0; y_0)$ et $(x_1; y_1)$ (fig. 138). Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$X = x_1 - x_0; \quad Y = y_1 - y_0 \quad \text{et :}$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = \overline{AB}^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2.$$

Si d désigne la distance AB :

$$\boxed{d^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

En particulier, la distance du point M (x, y) à l'origine O est :

$$\boxed{OM = \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

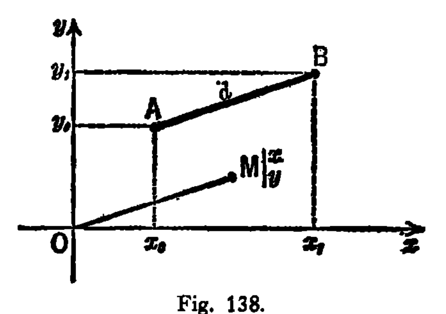


Fig. 138.

290. Cosinus de l'angle de deux vecteurs du plan. — Considérons dans un repère orthonormé les vecteurs $\vec{U}$ (X, Y) et $\vec{V}$ (X′, Y′) de modules u et v, et d'angle θ :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = uv \cos\theta \implies \cos\theta = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{uv}.$$

Or (nº 178) : $u = \sqrt{X^2 + Y^2}$; $v = \sqrt{X'^2 + Y'^2}$ et $\vec{U} \cdot \vec{V} = XX' + YY'$.

Donc : $$\boxed{\cos\theta = \frac{XX' + YY'}{\sqrt{(X^2 + Y^2)(X'^2 + Y'^2)}}}.$$

291. Théorème fondamental. — ***Dans un repère orthonormé, la droite*** D ***d'équation :*** $ax + by + c = 0$, ***est perpendiculaire au vecteur*** $\overrightarrow{OR}$ ***de composantes scalaires*** a ***et*** b :

Les résultats établis pour un repère cartésien quelconque restent évidemment valables pour un repère orthonormé où les axes Ox et Oy sont perpendiculaires et ont des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de même module.

Ainsi, toute droite a une équation de la forme : $ax + by + c = 0$ et, réciproquement, toute équation de cette forme est représentée graphiquement par une droite.

Soient M_0 $(x_0;y_0)$ un point fixe et M $(x; y)$ un point variable de la droite D (fig. 139). Construisons le vecteur $\overrightarrow{OR}$ de composantes scalaires a et b. Puisque M_0 et M appartiennent à la droite D :

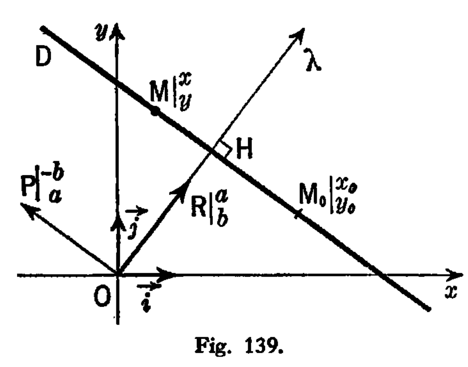


Fig. 139.

$$ax + by + c = 0$$
$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

et, par différence :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad (1)$$

Or, $x - x_0$ et $y - y_0$ étant les composantes du vecteur $\overrightarrow{M_0M}$, le premier membre de la relation (1) est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{M_0M}$.

Donc : $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$

Il en résulte (n° 288) que le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ et la droite D sont perpendiculaires au vecteur $\overrightarrow{OR}$.

Ainsi la droite d'équation $2x + 3y - 5 = 0$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OR}$ de composantes scalaires 2 et 3.

292. Réciproque. — ***Toute droite perpendiculaire au vecteur*** $\overrightarrow{OR}$ (a, b) ***a une équation de la forme :*** $ax + by + c = 0$.

Soit M (x_0, y_0) un point quelconque de cette droite D. Pour qu'un point M (x, y) du plan appartienne à D, il faut et il suffit que $\overrightarrow{OR}.\overrightarrow{M_0M} = 0$.

Soit : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \iff ax + by - (ax_0 + by_0) = 0.$

Équation de la forme : $ax + by + c = 0$, en posant $c = -(ax_0 + by_0)$.

Il en résulte que toute droite d'équation : $ax + by + \lambda = 0$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OR}$ (a, b), et par conséquent parallèle à la droite D d'équation : $ax + by + c = 0$.

293. Remarque. — L'expression $ax + by$ est le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{OR}$ (a, b) et du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (x, y). L'équation de la droite D s'écrit :

$$ax + by = -c \iff \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OM} = -c.$$

Or l'intersection H des droites D et OR est la projection orthogonale du point M sur la droite $\overrightarrow{OR}$. Donc (n° 172) :

$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OH} \implies \boxed{c = -\overline{OR} \cdot \overline{OH}}.$$

294. Équation normale d'une droite. — Dans le cas particulier où le vecteur $\overrightarrow{OR}$ est unitaire (fig. 140), il est défini par l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OR}) = \theta$ (à $2k\pi$ près en radians) et ses composantes sont : $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Désignons par p la mesure $\overline{OH}$ du vecteur $\overrightarrow{OH}$ sur l'axe $O\lambda$ de vecteur unitaire $\overrightarrow{OR}$. Dans ces conditions :

$$a = \cos\theta, \quad b = \sin\theta \quad \text{et} \quad c = -\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OH} = -p.$$

L'équation de la droite D, perpendiculaire en H à la droite OR, s'écrit :

$$\boxed{x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0}.$$

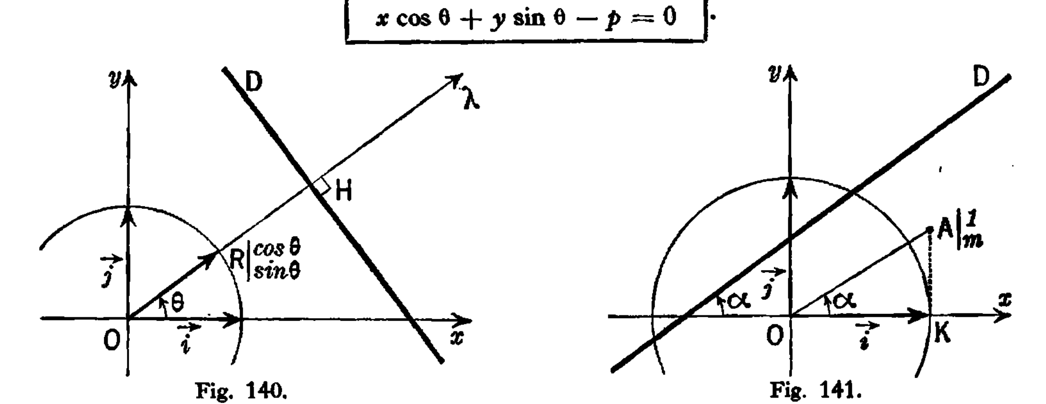


Fig. 140. Fig. 141.

Par exemple si $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $OH = \frac{5}{2}$, l'équation de D s'écrit :

$$\frac{x}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} = 0 \iff x + y\sqrt{3} - 5 = 0.$$

295. Pente d'une droite. — Dans un repère orthonormé (fig. 141) la droite d'équation $y = mx + p$ ou $mx - y + p = 0$ est parallèle au vecteur $\overrightarrow{OA}\,(1; m)$ et perpendiculaire au vecteur de composantes $(m; -1)$.

Désignons par α l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA})$. Le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1 passe par K, projection orthogonale de A sur l'axe Ox. Les axes Ox et Oy sont respectivement l'axe des cosinus et l'axe des sinus et : $\operatorname{tg}\alpha = \overline{KA} = m$.

Le nombre m se nomme alors *pente* de la droite D par rapport à l'axe Ox.

Dans un repère orthonormé, le coefficient directeur d'une droite est égal à la pente de cette droite par rapport à l'axe Ox.

Quel que soit le sens positif adopté sur la droite D, l'axe Δ obtenu fait avec Ox un angle β, en radians, tel que : $\beta = \alpha + k\pi$ et :

$$\boxed{\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha = m}.$$

296. Condition d'orthogonalité de deux droites. — 1° Les droites D et D' d'équations respectives : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, sont respectivement perpendiculaires aux vecteurs $\overrightarrow{OR}\,(a; b)$ et $\overrightarrow{OR'}\,(a'; b')$. Pour que ces droites soient perpendiculaires, il faut et il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OR'}$ soient perpendiculaires, donc que (n° 288) :

$$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OR'} = 0 \iff \boxed{aa' + bb' = 0}.$$

Ainsi les droites d'équations : $4x + 6y - 7 = 0$ et $3x - 2y + 9 = 0$ sont perpendiculaires car : $4 \times 3 + 6 \times (-2) = 0$.

2° La condition : $aa' + bb' = 0$ s'écrit : $\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a'}{b'}\right) = -1$.

Or les coefficients directeurs des droites D et D' sont : $m = -\frac{a}{b}$ et $m' = -\frac{a'}{b'}$.

Pour que deux droites soient perpendiculaires, il faut et il suffit, dans un repère orthonormé, que le produit de leurs pentes soit égal à — 1.

Les droites $y = -\frac{1}{3}x + 7$ et $y = 3x + 4$ sont perpendiculaires $\left(-\frac{1}{3} \times 3 = -1\right)$.

297. Distance d'un point à une droite. — Considérons la droite D d'équation $ax + by + c = 0$ et un point quelconque du plan M (x, y) qui se projette orthogonalement en K (x_0, y_0) sur la droite D (fig. 142).

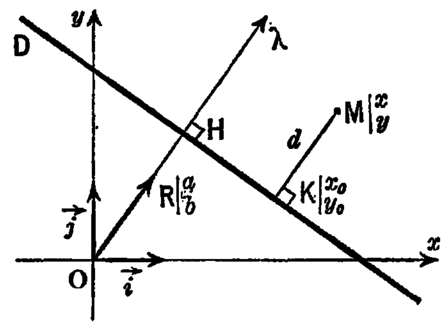


Fig. 142.

Le vecteur $\overrightarrow{OR}$ de composantes a et b est normal à la droite (n° 291) et le vecteur $\overrightarrow{KM}$ parallèle à OR a pour composantes $x - x_0$ et $y - y_0$.

Le produit scalaire $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{KM}$ de ces deux vecteurs mesurés sur l'axe Oλ dirigé suivant $\overrightarrow{OR}$ et de même sens s'écrit (n°s 172 et 178) :

$$\begin{aligned} OR \cdot \overline{KM} &= a(x - x_0) + b(y - y_0) \\ &= ax + by - (ax_0 + by_0). \end{aligned}$$

Or : $OR = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $ax_0 + by_0 = -c$ car le point $K(x_0, y_0)$ appartient à la droite D. Donc :

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \overline{KM} = ax + by + c \quad \Longrightarrow \quad \overline{KM} = \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (1)$$

Cette formule donne la distance algébrique $\overline{KM}$ de la droite D au point $M(x, y)$ comptée positivement ou négativement suivant que les vecteurs $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{OR}$ sont de même sens ou non. En valeur absolue on obtient, en posant $d = KM = |\overrightarrow{KM}|$:

$$\boxed{d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{d^2 = \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}}. \qquad (2)$$

En particulier la distance OH de l'origine à la droite D est : $OH = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Ainsi la distance du point $M(x = 9, y = 5)$ à la droite : $3x + 4y - 12 = 0$ est donc :

$$d = \frac{|3 \times 9 + 4 \times 5 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{35}{\sqrt{25}} = 7.$$

298. Remarque. — Les formules précédentes se simplifient si la droite D est donnée par son équation normale : $x \cos\theta + y \sin\theta - p = 0$ car alors $OR = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$:

$$\boxed{d = |x \cos\theta + y \sin\theta - p|}.$$

299. Angle aigu de deux droites. — Les deux droites D et D′ d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont respectivement perpendiculaires aux vecteurs $\overrightarrow{OR}$ (a, b) et $\overrightarrow{OR'}$ (a', b'). L'angle aigu V de ces deux droites est égal à l'angle aigu de ces deux vecteurs, donc (nº 290) :

$$\cos V = \frac{|aa' + bb'|}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

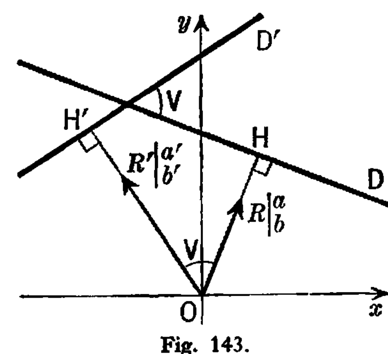


Fig. 143.

Posons $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OR})$; $\theta' = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OR'})$ et $V = \theta' - \theta$:

$$\operatorname{tg} V = \operatorname{tg}(\theta' - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\theta' - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\theta'} = \frac{\dfrac{b'}{a'} - \dfrac{b}{a}}{1 + \dfrac{bb'}{aa'}}$$

d'où :
$$\boxed{\operatorname{tg} V = \frac{ab' - a'b}{aa' + bb'}}.$$

Cette formule définit à $k\pi$ près l'angle orienté $V = (\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OR'})$ et détermine la direction de la droite D′ connaissant celle de la droite D.

Ainsi : $D \parallel D' \iff \operatorname{tg} V = 0 \iff ab' - a'b = 0$ (nº 280, 2º).

$D \perp D' \iff \operatorname{tg} V = \infty \iff aa' + bb' = 0$ (nº 296).

L'angle V des droites $7x - 3y + 6 = 0$ et $2x - 5y - 4 = 0$ vérifie :

$$\operatorname{tg} V = \frac{-35 + 6}{14 + 15} = -1. \quad \text{Donc : } V = (\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OR'}) = -45^\circ.$$

300. Applications. — 1º ***Droite passant par un point*** $M_0(x_0; y_0)$ ***et perpendiculaire à un vecteur donné*** $\vec{V}(a; b)$.

Si M (x, y) est un point de la droite cherchée, on écrit que $\vec{V} . \overrightarrow{M_0M}$ est nul :

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0} \iff ax + by - (ax_0 + by_0) = 0.$$

Exemple. — *On donne* A $(+1; -1)$ *et* B $(+3; +3)$. *Équation de la médiatrice de* AB? Elle passe par M_0 $(+2; +1)$ milieu de AB et elle est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ $(+2; +4)$, d'où son équation :

$$2(x - 2) + 4(y - 1) = 0 \iff x + 2y - 4 = 0.$$

2º ***Droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée.***

La droite Δ donnée, d'équation $ax + by + c = 0$, est (nº 291) perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OR}$ $(a; b)$. Soit M $(x; y)$ un point quelconque de la droite D passant par M_0 $(x_0; y_0)$ et perpendiculaire à Δ. Il suffit d'écrire que les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$ et $\overrightarrow{OR}$ sont parallèles.

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}} \iff b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Exemple. — La droite D passant par $M_0\left(-\frac{3}{2}; +1\right)$ et perpendiculaire à la droite Δ d'équation : $3x + 2y - 9 = 0$, a pour équation :

$$\frac{x + 1{,}5}{3} = \frac{y - 1}{2} \iff 2x - 3y + 6 = 0.$$

LE CERCLE (REPÈRE ORTHONORMÉ)

301. Cercle défini par son centre et son rayon. — Dans un repère orthonormé xOy (fig. 144), considérons le cercle (C) de centre $\omega(a, b)$ et de rayon R donné. Pour que le point $M(x, y)$ appartienne à ce cercle, il faut et il suffit que $\overline{\omega M}^2 = R^2$.

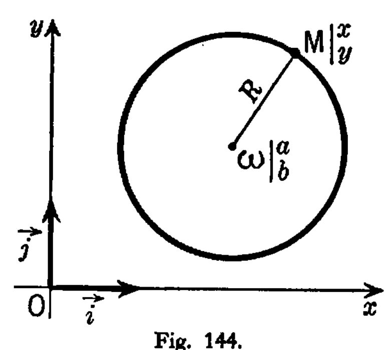


Fig. 144.

Les composantes scalaires du vecteur $\overrightarrow{\omega M}$ sont :

$$X = x - a \quad \text{et} \quad Y = y - b \quad (\text{n}^\circ\ 85)$$

et la relation : $\overline{\omega M}^2 = R^2$ équivaut à :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (1)$$

La relation (1) qui exprime une condition nécessaire et suffisante pour que M appartienne au cercle (C) est l'*équation* de ce cercle. Donc :

Dans un repère orthonormé, l'équation d'un cercle* (C) *centré en* $\omega(a, b)$ *et de rayon* R, *s'écrit :

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0}. \qquad (1)$$

En posant : $c = a^2 + b^2 - R^2$, cette équation devient :

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}. \qquad (2)$$

Ainsi le cercle (C), centré en $\omega\ (+3; -2)$, de rayon $R = 5$ a pour équation :

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 - 5^2 = 0 \iff x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0.$$

302. Réciproque. — ***Toute équation de la forme :*** $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ***représente, si*** $a^2 + b^2 - c$ ***est positif ou nul, un cercle de centre*** $\omega(a, b)$ ***et de rayon*** $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$:

Cette équation s'écrit en effet :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c. \qquad (3)$$

Soit ω le point de coordonnées (a, b) et $M\ (x, y)$ un point quelconque du plan.

L'équation (3) exprime que : $\overline{\omega M}^2 = a^2 + b^2 - c$.

1° $a^2 + b^2 - c > 0$. On peut poser $a^2 + b^2 - c = R^2$ et l'on obtient $\overline{\omega M}^2 = R^2$. Le lieu du point M est le cercle de centre ω et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2° $a^2 + b^2 - c = 0$. On obtient $\overline{\omega M}^2 = 0$. Le cercle a un rayon nul : c'est le cercle-point ω.

3° $a^2 + b^2 - c < 0$. L'équation (3) est impossible. On dit que le cercle est imaginaire.

303. Cas particuliers. — 1° ***Cercle centré à l'origine.*** — Dans ce cas (fig. 145) $a = b = 0$ et l'équation (1) devient :

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

2° ***Cercle passant par l'origine.*** — Dans ce cas (fig. 146), l'équation (2) doit être vérifiée pour $x = y = 0$, ce qui nécessite $c = 0$. L'équation (2) devient :

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by = 0$$

et représente le cercle passant par O, de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

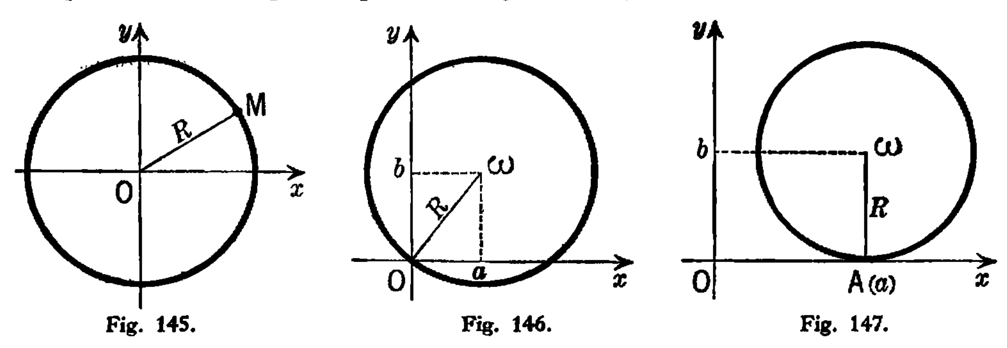


Fig. 145. Fig. 146. Fig. 147.

3° ***Cercle tangent à l'un des axes.*** — Pour que le cercle C soit tangent à l'axe Ox au point A $(a, 0)$, il faut que son centre ω ait pour abscisse a et pour ordonnée b telle que $|b| = R$ (fig. 125). Son équation s'écrit :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - b^2 = 0$$

soit : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0 \iff (x - a)^2 + y^2 - 2by = 0.$

Réciproquement, en faisant $y = 0$ dans cette équation, on obtient : $(x - a)^2 = 0$, équation dont $x = a$ est racine double, ce qui exprime que le cercle C est tangent en A $(a, 0)$ à l'axe Ox.

De même, l'équation d'un cercle C tangent en B $(0, b)$ à l'axe Oy est :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + b^2 = 0 \iff x^2 + (y - b)^2 - 2ax = 0.$$

304. Cercle défini par un diamètre. — Dans le repère orthonormé xOy (fig. 148) considérons les points $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ et le cercle (C) de diamètre AB.

Si le point $M(x, y)$ appartient au cercle (C), l'angle AMB est droit et le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ ou $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ est nul. Réciproquement (n° 171) :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \implies \overrightarrow{AM} = 0$$

$$\text{ou } \overrightarrow{BM} = 0 \text{ ou } \widehat{AMB} = 1^D,$$

ce qui exprime que M appartient au cercle (C).

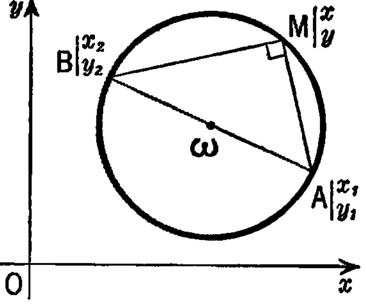


Fig. 148.

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour composantes : $x - x_1$ et $y - y_1$; le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour composantes : $x - x_2$ et $y - y_2$. L'équation du cercle (C) est donc (n° 178) :

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0} \qquad (4)$$

ou encore : $x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)\,x - (y_1 + y_2)\,y + x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ (5)

On retrouve la forme générale de l'équation du cercle en posant :

$$a = \frac{1}{2}(x_1 + x_2); \quad b = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \quad \text{et} \quad c = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

305. Intersection d'une droite et d'un cercle. — Le calcul des coordonnées des points d'intersection du cercle (C) :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (1)$$

et de la droite (D) :

$$ux + vy + w = 0 \quad (2)$$

s'effectue en résolvant le système formé par les deux équations.

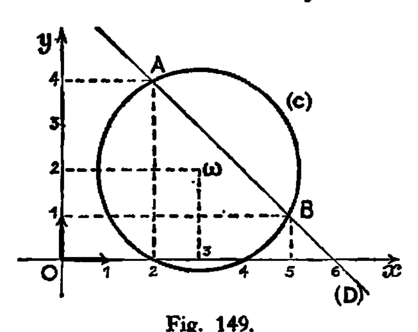


Fig. 149.

EXEMPLE. — *Déterminer les points d'intersection de la droite :* $x + y - 6 = 0$ *et du cercle :*

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0 \text{ (fig. 149).}$$

Sur la droite : $y = 6 - x$. Portons cette valeur dans l'équation du cercle :

$$x^2 + (6 - x)^2 - 6x - 4(6 - x) + 8 = 0$$

soit $2x^2 - 14x + 20$

ou $x^2 - 7x + 10 = 0$, équation qui admet pour racines 2 et 5.

On obtient les deux points d'intersection : A ($x = 2$, $y = 4$) et B ($x = 5$, $y = 1$).

Pour que la droite (D) soit tangente au cercle (C) il faut et il suffit que la distance d du centre ω (a, b) de ce cercle à la droite soit égale à son rayon R. Donc

$$\frac{|ua + vb + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}} = R \implies R^2(u^2 + v^2) - (ua + vb + w)^2 = 0.$$

306. Tangente en un point d'un cercle. — Soit $A(x_0, y_0)$ un point donné sur le cercle (C) de centre $\omega(a, b)$. La tangente en A (fig. 150) est la perpendiculaire en A au rayon ωA. Si M(x, y) désigne un point quelconque du plan, l'équation de cette tangente s'obtient en écrivant (n° 300) que : $\overrightarrow{\omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

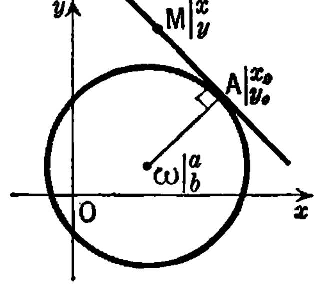


Fig. 150.

EXEMPLE. — *Équation de la tangente en* A (+ 5; + 3) *au cercle :* $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$.

Le point A (5; 3) appartient au cercle :

$$25 + 9 - 20 - 6 - 8 = 0.$$

Le centre du cercle est le point ω (2; 1) et le vecteur $\overrightarrow{\omega A}$ a pour composantes :

X = 5 − 2 = 3 et Y = 3 − 1 = 2. D'où l'équation de la tangente en A :

$$3(x - 5) + 2(y - 3) = 0 \implies 3x + 2y - 21 = 0.$$

EXERCICES

— Dans un repère orthonormé, indiquer quelle particularité présentent les droites suivantes :

1123. $y = \frac{x}{2}$ et $y = -\frac{x}{2}$.

1124. $y = 3x - 6$ et $y = -3x + 6$.

1125. $x + 2y + 4 = 0$ et $3x + 6y - 1 = 0$.

1126. $2x - 4y + 2 = 0$ et $3x - 6y - 5 = 0$.

1127. $y = 3x - 4$ et $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

1128. $x = \frac{2}{3}y - 4$ et $x = -\frac{3}{2}y + 7$.

1129. $2x - 5y + 13 = 0$ et $5x + 2y - 11 = 0$.

1130. $4x - 6y + 1 = 0$ et $-6x - 4y + 3 = 0$.

— Calculer la distance, dans un repère orthonormé, du point $A(x_0; y_0)$ à une droite donnée D dans les cas suivants :

1131. A (0; 0) D : $3x + 4y - 1 = 0$.
1132. A (4; 0) D : $x + y - 1 = 0$.
1133. A (− 3; + 2) D : $x - 4 = 0$.
1134. A (2; − 5) D : $y + 3 = 0$.
1135. A (1; 1) D : $5x + 12y - 1 = 0$.
1136. A (2; 3) D : $x + y\sqrt{2} - 4 = 0$.
1137. A (+ 2; − 7) D : $4x + 5y + 20 = 0$.
1138. A (0; + 2) D : $5x - y\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 0$.
1139. A (1; 4) D : $x \cos 36^\circ + y \sin 36^\circ - 2 = 0$.
1140. A (− 1; − 1) D : $x \cos 15^\circ + y \sin 15^\circ - 7 = 0$.

— Équation dans un repère orthonormé, d'une droite passant par $A(x_0; y_0)$ et perpendiculaire à un vecteur $\vec{V}(\alpha, \beta)$ donné, dans les cas suivants :

1141. A (4; 0) et $\vec{V}(+1; +2)$.
1142. A (0; + 3) et $\vec{V}(1; 1)$.
1143. A (− 1; − 2) et $\vec{V}(2; 3)$.
1144. A (− 2; + 5) et $\vec{V}(-1; +2)$.
1145. A (+ 4; − 3) et $\vec{V}\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.
1146. A (− 5; − 7) et $\vec{V}(1; 5)$.

— Équation dans un repère orthonormé, de la droite passant par A et perpendiculaire à une droite donnée D, dans les cas suivants :

1147. A (− 3; − 5) et D : $x + y - 7 = 0$.
1148. A (+ 4; + 9) et D : $2x - y + 5 = 0$.
1149. A (− 1; − 1) et D : $3x - 5y + 9 = 0$.

— Établir, dans un repère orthonormé, l'équation de la médiatrice du segment AB :

1150. A (0; 4) et B (5; 0).
1151. A (0; 6) et B (− 4; + 2).
1152. A (5; 0) et B (− 2; + 4).
1153. A (3; 7) et B (− 7; + 3).

1154. Dans un repère orthonormé on donne les points A (3; 0), B (− 2; 0) et C (0; 4).
1° Former les équations des hauteurs du triangle ABC. Montrer qu'elles sont concourantes en un point H dont on calculera les coordonnées.
2° Même question pour les médianes du triangle ABC (on désignera par G leur point commun).
3° Même question pour les médiatrices du triangle ABC (on désignera par ω leur point commun).
4° Comparer les vecteurs $\overrightarrow{\omega H}$ et $\overrightarrow{\omega G}$. Qu'en résulte-t-il ?

1155. Dans un repère orthonormé xOy on donne les points A (4; 0) et B (0; 3).
1° Former les équations des bissectrices des angles A et B du triangle rectangle OAB.
2° En déduire les coordonnées du centre du cercle inscrit à ce triangle et les centres des cercles ex-inscrits.

1156. Dans un repère orthonormé xOy, on donne les points A (8; 0); B (0; 3); C (0; − 8) et D (− 3; 0). On désigne par I et J les milieux des segments AB et CD.
1° Calculer les composantes des vecteurs OI et OJ.
2° Montrer que les droites OI et OJ sont respectivement perpendiculaires aux droites CD et AB.

1157. Dans un repère orthonormé xOy on donne les points A $(a;\ 0)$, B $(b;\ 0)$ et C $(0;\ c)$. Une droite variable parallèle à $x'x$ et d'ordonnée t coupe les droites CA et CB respectivement en M et N. Les projections orthogonales de M et N sur $x'x$ sont les points Q et P.

1° Calculer les coordonnées des points M, N, I milieu de AB, J centre du rectangle MNPQ et K milieu de OC.

2° Montrer que les points I, J, K sont alignés et trouver le lieu du point J lorsque t varie.

1158. Dans un repère orthonormé xOy, on donne les points A $(a + t;\ 0)$ et B $(0;\ a - t)$. On suppose a constant et t variable. On construit le vecteur $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

1° Former l'équation du lieu du point C.

2° Former l'équation de la perpendiculaire menée du point C à la droite AB.

3° Montrer que cette perpendiculaire passe par le point fixe I $(2\,a;\ 2\,a)$.

1159. Dans un repère orthonormé xOy on donne les points A $(a;\ 0)$; B $(0;\ b)$; C $(a;\ -a)$ et D $(-b;\ b)$.

1° Former les équations des droites BC et AD.

2° Montrer qu'elles se coupent sur la hauteur relative à l'hypoténuse du triangle OAB.

1160. Dans un repère orthonormé xOy on donne les points A $(a;\ 0)$ et B $(0;\ b)$. Soit t un paramètre. On joint le point M d'abscisse $a + t$ sur l'axe $x'x$ au point N d'ordonnée $b + t$ sur l'axe $y'y$.

1° Former l'équation de la médiatrice du segment MN.

2° Montrer qu'elle passe par un point fixe lorsque t varie.

1161. Dans un repère orthonormé xOy, on considère les points A $(a;\ 0)$ et B $(0;\ b)$. La médiatrice du segment AB coupe la première bissectrice en P et la seconde en Q.

1° Former l'équation de la médiatrice de AB.

2° Calculer les coordonnées des points P et Q.

3° Montrer que le quadrilatère APBQ est un carré.

4° On suppose $a + b = k$ constante donnée. Montrer que le point P est fixe et trouver le lieu du point Q et celui du milieu de AB.

— Équation d'un cercle ω, de rayon R, dans les cas suivants :

1162. $\omega\,(0;\,0)$; $R = 3$.
1163. $\omega\,(-4;\,0)$; $R = 2$.
1164. $\omega\,(0;\,-3)$; $R = 5$.
1165. $\omega\,(-2;\,4)$; $R = 3$.
1166. $\omega\,(4;\,-3)$; $R = 1$.
1167. $\omega\,(-2;\,-1)$; $R = 1$.

— Équation d'un cercle tangent à l'axe Ox et dont on donne le centre ω dans les cas suivants :

1168. $\omega\,(4;\,2)$. **1169.** $\omega\,(-3;\,2)$. **1170.** $\omega\,(4;\,0)$.

— Équation d'un cercle tangent à l'axe Oy connaissant son centre ω :

1171. $\omega\,(0;\,3)$. **1172.** $\omega\,(-5;\,-2)$. **1173.** $\omega\,(+3;\,-7)$.

— Équation d'un cercle de diamètre AB dans les cas suivants :

1174. A $(2;\,3)$ et B $(4;\,7)$.
1175. A $(-4;\,-2)$ et B $(+1;\,+1)$.
1176. A $(-5;\,+7)$ et B $(+3;\,+9)$.
1177. A $(0;\,+2)$ et B $(+5;\,+6)$.
1178. A $(-3;\,0)$ et B $(0;\,+4)$.
1179. A $(-1;\,-1)$ et B $(0;\,0)$.

— Étudier l'intersection du cercle (C) et de la droite (D) dans les cas suivants :

1180. (C) : $x^2 + y^2 - 9 = 0$; (D) : $2\,x + 3\,y - 6 = 0$.
1181. (C) : $x^2 + y^2 - 4 = 0$; (D) : $x + 3\,y - 3 = 0$.
1182. (C) : $x^2 + y^2 - 2\,x - 4\,y = 0$; (D) : $x + y - 1 = 0$.
1183. (C) : $x^2 + y^2 + 6\,x + 4\,y + 9 = 0$; (D) : $x - y + 2 = 0$.
1184. (C) : $x^2 + y^2 - 8\,x - 2\,y + 1 = 0$; (D) : $2\,x - y + 1 = 0$.
1185. (C) : $x^2 + y^2 - 4\,x - 10\,y + 28 = 0$; (D) : $x - 3\,y + 13 = 0$.
1186. (C) : $x^2 + y^2 + 2\,x + 2\,y - 7 = 0$; (D) : $x + 2\,y + 3 = 0$.

1187. (C) : $x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{13}{2} = 0$; (D) : $2x - 5y + \frac{7}{2} = 0$.

1188. (C) : $x^2 + y^2 - \frac{10x}{3} - \frac{200}{9} = 0$; (D) : $2x + y = 0$.

1189. Dans un repère orthonormé on donne les points A($-$ 2; 0) et B (4; 3) ainsi que le cercle (C) d'équation : $x^2 + y^2 - \frac{7x}{2} - 1 = 0$.

1° Former l'équation de la droite AB.

2° Déterminer les points d'intersection M et M' de la droite AB et du cercle (C).

3° Évaluer les rapports $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ et $\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$.

1190. 1° Former, en coordonnées orthonormées, l'équation d'une droite D de pente m passant par le point P ($-$ 5; 0).

2° Étudier l'intersection de la droite D et du cercle C d'équation $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

3° Former les équations des tangentes au cercle C, issues du point P.

1191. 1° Montrer que dans le repère orthonormé xOy, l'équation d'un cercle coupant l'axe $x'x$ aux points A (a; 0) et B (b; 0) est de la forme :

$$(x - a)(x - b) + y^2 + my = 0.$$

2° Former l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC sachant que les coordonnées de ses sommets sont : (4; 0) pour A; ($-$ 3; 0) pour B et (0; 5) pour C.

1192. On donne dans un repère orthonormé xOy les points A (12; 0), B (0; 5) et I (2; 2).

1° Montrer que le point I est équidistant des côtés du triangle OAB. Former l'équation du cercle inscrit dans ce triangle.

2° Établir l'équation du cercle passant par les milieux des côtés du triangle OAB.

3° Montrer que les deux cercles précédents se coupent en deux points confondus. Déterminer leur point de contact et l'équation de la tangente commune en ce point.

1193. On considère le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 4 = 0$.

1° Déterminer a pour que ce cercle passe par le point A (6; 0).

2° Trouver le lieu du centre de ce cercle.

1194. Un cercle variable de centre ω (α, β) passe par le point fixe A (a; 0).

1° Pour que les tangentes issues de l'origine O à ce cercle soient perpendiculaires il faut et il suffit que $\omega O = R\sqrt{2}$ où R désigne le rayon du cercle.

2° Dans ces conditions, former la relation qui lie les coordonnées α et β du centre ω et en déduire le lieu de ω.

1195. On considère le cercle : $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$.

1° Déterminer les équations des tangentes issues du point M (5; 8). Montrer qu'elles sont rectangulaires.

2° Calculer les coordonnées des points de contact A et B des tangentes précédentes.

3° Déterminer les tangentes du cercle aux points C et D diamétralement opposés à A et B.

1196. On donne dans un repère orthonormé les points A (a, 0) et B ($-$ a, 0). Soient d'autre part deux coefficients donnés α et β et une constante k.

1° Déterminer le lieu des points M du plan tels que : $\alpha\,\overline{MA}^2 + \beta\,\overline{MB}^2 = k$.

2° Pour $\alpha + \beta \neq 0$, le lieu précédent est un cercle de centre ω. Démontrer les relations :

$$\alpha\,\overrightarrow{\omega A} + \beta\,\overrightarrow{\omega B} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{M\omega}.$$

3° Calculer en fonction de α et β l'expression $z = \alpha\,\overline{MA}^2 + \beta\,\overline{MB}^2 - (\alpha + \beta)\,\overline{M\omega}^2$ et montrer qu'elle est indépendante du point M.

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

307. Définitions. — Considérons la suite des nombtes suivants :

5; 8; 11; 14; 17; 20.

Chacun d'eux est la somme du précédent et du nombre 3. Nous dirons que cette suite est une *progression arithmétique* dont le premier terme est 5; dont le second terme est 8...; dont la raison est 3. Ainsi :

On appelle progression arithmétique une suite de nombres tels que chacun d'eux soit la somme du précédent et d'un nombre constant appelé raison de la progression.

La progression est *croissante* si la raison est positive, elle est *décroissante* si la raison est négative. Chaque nombre de la suite est un *terme* de la progression.

Exemples. — La progression 5; 8; 11; 14 est croissante de raison + 3.
La progression 7; 5; 3; 1 est décroissante de raison − 2.

La raison est désignée par r, le terme de rang n par u_n. La définition se traduit par :

$$\boxed{u_n = u_{n-1} + r}.$$

308. Remarques. — 1° Une progression arithmétique est déterminée lorsqu'on connaît le premier terme, la raison et le nombre des termes. La progression arithmétique de 7 termes dont le 1er terme est − 9 et la raison 4 s'écrit :

$$-9;\quad -5;\quad -1;\quad 3;\quad 7;\quad 11;\quad 15.$$

2° Lorsqu'une suite de nombres forme une progression arithmétique de raison r, on obtient une progression arithmétique de raison $-r$ en l'écrivant dans l'ordre inverse :

La suite 15; 11; 7; 3; − 1; − 5; − 9 est une progression arithmétique de raison − 4.

3° On peut prolonger une progression vers la droite et aussi vers la gauche.

Le nombre des termes d'une progression arithmétique peut devenir infiniment grand; on obtient alors une *progression arithmétique illimitée.*

4° Si la raison est nulle, tous les termes sont égaux.

309. Calcul d'un terme de rang donné. — Considérons la progression arithmétique : $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ de n termes et de raison r. Par définition :

$$u_2 = u_1 + r;\quad u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r;\quad u_4 = u_3 + r = u_1 + 3r, \text{ etc.,}$$

Chaque terme est égal au premier augmenté d'autant de fois la raison qu'il existe de termes précédant le terme à calculer.

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}. \qquad (1)$$

EXEMPLES. — 1° Le 1 000ᵉ terme de la progression arithmétique de raison $\frac{2}{3}$ dont le 1er terme est 1 vaut : $1 + 999 \times \frac{2}{3} = 667$.

2° La suite des nombres entiers est une progression arithmétique dont le 1er terme est 1 et la raison 1. Le nième nombre entier est $1 + n - 1 = n$.

3° La suite des nombres impairs est une progression arithmétique de raison 2, dont le 1er terme est 1. Le nième nombre impair est : $1 + 2(n - 1) = 2n - 1$.

REMARQUE. — La relation (1) montre que dans une progression arithmétique illimitée, lorsque n tend vers l'infini, u_n tend donc vers $\pm \infty$ selon que r est positif ou négatif.

310. Insertion de moyens arithmétiques. — La relation (1) montre que l'on peut calculer l'une des quantités u_1, u_n, r, n lorsqu'on connaît les 3 autres. En particulier, insérer m moyens arithmétiques entre deux nombres donnés a et b, c'est former une progression arithmétique dont le 1er terme soit a, dont le dernier soit b et telle qu'il existe m termes entre a et b. Le nombre total des termes est $m + 2$ et l'inconnue est la raison r :

$$r = \frac{u_n - u_1}{n - 1}, \; n = m + 2 \quad \text{et} \quad u_1 = a, \, u_n = b \implies r = \frac{b - a}{m + 1}.$$

EXEMPLE. — *Insérer* 100 *moyens arithmétiques entre* 1 *et* 2.

$$r = \frac{2 - 1}{101} = \frac{1}{101} \text{ et la progression est : } \; 1 \, ; \, 1 + \frac{1}{101} \, ; \, 1 + \frac{2}{101} \, ; \cdots 1 + \frac{100}{101} \, ; \, 2.$$

311. Théorème. — ***Dans une progression arithmétique, la somme de deux termes équidistants des termes extrêmes est égale à la somme des extrêmes.***

Considérons la progression de n termes $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Les termes extrêmes sont u_1 et u_n. Il existe dans la suite p termes *avant* u_{p+1} et p termes *après* u_{n-p}. Donc u_{p+1} et u_{n-p} sont deux termes de la progression *équidistants des extrêmes*. D'après le n° 309 :

$$\left.\begin{aligned} u_{p+1} &= u_1 + pr \\ u_{n-p} &= u_n - pr \end{aligned}\right\} \implies u_{p+1} + u_{n-p} = u_1 + u_n.$$

312. Corollaire. — Soient 3 termes successifs a, b, c d'une progression arithmétique :

$$a = b - r \quad \text{et} \quad c = b + r \implies b = \frac{a + c}{2}.$$

Réciproquement, si $b = \frac{a + c}{2}$ on en déduit : $a + c = 2b$ et $c - b = b - a$, ce qui montre que la suite a, b, c est une progression arithmétique. Donc :

Pour que trois nombres soient en progression arithmétique, il faut et il suffit que le second soit la moyenne arithmétique des deux autres.

313. Somme des termes d'une progression arithmétique. — Soit la progression :

$$u_1, \; u_2, \; u_3, \; \ldots\ldots\ldots, \; u_{n-2}, \; u_{n-1}, \; u_n$$

et

$$u_n, \; u_{n-1}, \; u_{n-2}, \; \ldots\ldots\ldots, \; u_3, \; u_2, \; u_1$$

la progression obtenue en l'écrivant dans l'ordre inverse. La somme S des termes de chaque progression est :

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u$$
$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_3 + u_2 + u_1.$$
$$2S = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + \dots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1).$$

D'où (n° 311) : $2S = n(u_1 + u_n) \iff \boxed{S = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}}$. (2)

La somme des termes d'une progresson arithmétique est égale au demi-produit de la somme des termes extrêmes par le nombre des termes.

314. Exemples.

1° **Somme des n premiers nombres entiers.** — Ils forment une progression arithmétique de n termes; le premier est 1, le dernier est n.

Donc : $\boxed{S(n) = 1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$.

2° **Somme des n premiers nombres impairs.**

Le 1er terme est 1; le n^ième est $2n - 1$. Donc :

$$S'(n) = 1 + 3 + 5 \cdots + (2n - 1) = \frac{(1 + 2n - 1)\,n}{2} = n^2.$$

3° **Somme des carrés des n premiers nombres entiers.** — Soit à calculer :

$$\Sigma(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + n^2.$$

Utilisons l'identité $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Nous y remplaçons x successivement par 0, 1, 2 ... n. Nous obtenons $n + 1$ égalités que nous ajoutons membre à membre; après réduction des termes semblables, on obtient :

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1\\
2^3 &= 1^3 + (3 \times 1^2) + (3 \times 1) + 1\\
3^3 &= 2^3 + (3 \times 1^2) + (3 \times 2) + 1\\
&\dots\dots\dots\dots\\
n^3 &= (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\\
(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1\\
\hline
(n+1)^3 &= 3(1^2 + 2^2 \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1)
\end{aligned}$$

ou n° 314 : $$(n+1)^3 = 3\Sigma + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

d'où : $$3\Sigma = (n+1)\left[(n+1)^2 - 3\frac{n}{2} - 1\right] = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}$$

et : $$\boxed{\Sigma(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

Cette formule se vérifie aisément par récurrence car :

$$\Sigma(n) - \Sigma(n-1) = \frac{1}{6}\left[n(n+1)(2n+1) - (n-1)\,n(2n-1)\right] = n^2.$$

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES

315. Définitions. — Considérons la suite des nombres suivants :

$$2; \quad 6; \quad 18; \quad 54; \quad 162.$$

Chacun d'eux est le produit du précédent par 3. Nous dirons que cette suite est une *progression géométrique* dont le premier terme est 2, dont le second terme est 6 ..., dont la raison est 3. Ainsi :

On appelle progression géométrique une suite de nombres tels que chacun d'eux soit le produit du précédent par un nombre constant appelé raison de la progression.

La raison peut être positive ou négative mais nous nous limiterons au cas où elle est positive. La progression est *croissante* si la raison est supérieure à 1, *décroissante* si la raison est inférieure à 1. Chaque nombre de la suite est un *terme* de la progression.

Exemples. — La progression 2; 6; 18; 54 est croissante, de raison 3.

La progression $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$ est décroissante, de raison $\frac{1}{2}$.

La raison est désignée par q, le terme de rang n par u_n. La définition s'exprime par la relation :

$$\boxed{u_n = q\, u_{n-1}}.$$

316. Remarques. — 1° Une progression géométrique est déterminée lorsqu'on connaît le premier terme, la raison et le nombre des termes : la progression de 5 termes dont le 1er terme est 2 et la raison $\frac{1}{3}$ s'écrit :

$$2; \quad \frac{2}{3}; \quad \frac{2}{9}; \quad \frac{2}{27}; \quad \frac{2}{81}.$$

2° Lorsqu'une suite de nombres forme une progression géométrique de raison q, on obtient une progression géométrique de raison $\frac{1}{q}$ en l'écrivant dans l'ordre inverse.

La suite $\frac{2}{81}; \frac{2}{27}; \frac{2}{9}; \frac{2}{3}; 2$ est une progression géométrique de raison 3.

3° On peut prolonger une progression géométrique vers la droite et aussi vers la gauche.

Si le nombre des termes d'une progression géométrique devient infiniment grand, on obtient une progression *géométrique illimitée.*

4° Si la raison est 1, tous les termes de la progression sont égaux.

317. Calcul d'un terme de rang donné. — Considérons la progression géométrique : $u_1, u_2, u_3, u_4 ..., u_n$ de n termes et de raison q. Par définition : $u_2 = u_1q$; $u_3 = u_2q = u_1q^2$; $u_4 = u_3q = u_1q^3$ ...

Chaque terme est égal au produit du premier par une puissance de la raison dont l'exposant est égal au nombre des termes précédant celui que l'on doit calculer.

On a donc : $$\boxed{u_n = u_1\, q^{n-1}}.$$

EXEMPLE. — Le 64e terme de la progression géométrique dont le 1er terme est 1 et la raison 2 vaut $1 \times 2^{63} = 2^{63}$.

La relation précédente permet de calculer l'une des quantités u_1, u_n, q, n lorsqu'on connaît les 3 autres. Par exemple, si u_1, u_n, q et n sont donnés, on obtient :

$$q^{n-1} = \frac{u_n}{u_1} \quad \text{et} \quad q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}}.$$

318. Insertion de moyens géométriques. — Insérer m moyens géométriques entre deux nombres donnés a et b c'est former une progression géométrique dont le 1er terme soit a, dont le dernier soit b et telle qu'il existe m termes entre a et b.

Le nombre total des termes est $m + 2$; l'inconnue est la raison. On a : $n = m + 2$ et la relation du n° 317 donne

$$q^{m+1} = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Pour $m > 1$, le calcul n'est possible en général qu'à l'aide d'une table de logarithmes.

EXEMPLE. — *Insérer 3 moyens géométriques entre 1 et 625.* — On a : $q = \sqrt[4]{625} = 5$.
D'où la progression : 1; 5; 25; 125; 625.

319. Théorème. — ***Dans une progression géométrique, le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des extrêmes.***

Considérons la progression de n termes $u_1, u_2, ..., u_n$. Le raisonnement fait au n° 317 conduit aux égalités :

$$\left.\begin{aligned} u_{p+1} &= u_1 \cdot q^p \\ u_{n-p} &= u_n \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^p \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad u_{p+1} \cdot u_{n-p} = u_1 \cdot u_n.$$

320. Corollaire. — Soient trois termes successifs a, b, c d'une progression géométrique :

$$a = b \cdot \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad c = bq \quad \Longrightarrow \quad ac = b^2.$$

Réciproquement : $b^2 = ac \Longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ et a, b, c forment progression géométrique.

Pour que trois nombres soient en progression géométrique, il faut et il suffit que le second soit la moyenne géométrique des deux autres.

321. Somme des termes d'une progression géométrique.

Posons $\quad S = u_1 + u_2 + u_3 + ... u_{n-1} + u_n.$
$\quad Sq = u_1q + u_2q + u_3q ... + u_{n-1}q + u_nq$

Par définition $u_2 = u_1q$; $u_3 = u_2q$; ... ; $u_n = u_{n-1}q$; donc :

$$Sq - S = u_nq - u_1 \quad \text{ou} \quad S(q-1) = u_nq - u_1, \quad q \neq 1.$$

D'où : $$\boxed{S = \frac{u_nq - u_1}{q-1}} \quad \text{ou} \quad \boxed{S = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1}}.$$

Pour la progression géométrique : $a, b, c \ldots h, k, l$ de raison q,

on obtient : $$\boxed{S = \frac{lq - a}{q - 1}} \quad \text{ou} \quad S = \frac{a - lq}{1 - q}.$$

EXEMPLE. — Somme des termes de la progression géométrique de raison 2, dont le premier terme est 1 et qui compte 64 termes :

$$S = \frac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1.$$

322. Progression géométrique illimitée de raison positive.

1° Si $q > 1$, la suite est croissante. On admettra que q^n augmente indéfiniment avec n. Donc la somme S augmente indéfiniment avec n.

2° $0 < q < 1$, la suite est décroissante. Posons $q = \frac{1}{r}$ avec $r > 1$. Lorsque n augmente indéfiniment, r^n tend vers l'infini et son inverse q^n tend vers 0. Donc :

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} S = \frac{u_1}{1 - q}}.$$

Ainsi la somme $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ tend vers $S = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2$ lorsque n tend vers l'infini. On dit que 2 est la somme des termes de la progression illimitée envisagée.

EXERCICES

Progressions arithmétiques.

— u_1, u_n; r désignent le 1er terme, le dernier terme et la raison d'une progression arithmétique de n termes. Calculer :

1197. u_n connaissant $u_1 = 1$; $r = 7$; $n = 50$.
1198. u_n connaissant $u_1 = 3$; $r = -2$; $n = 20$.
1199. u_n connaissant $u_1 = 10$; $r = \frac{4}{5}$; $n = 1\,000$.
1200. u_1 connaissant $u_n = 117$; $r = 5$; $n = 200$.
1201. u_1 connaissant $u_n = -250$; $r = -2{,}5$; $n = 10\,000$.
1202. n connaissant $u_1 = 1$; $u_n = 1\,796$; $r = 5$.
1203. n connaissant $u_1 = -7$; $u_n = 576$; $r = \frac{11}{3}$.

— Insérer m moyens arithmétiques entre a et b sachant que :

1204. $a = -12$; $b = 18$; $m = 5$.
1205. $a = 4{,}5$; $b = 78{,}75$; $m = 100$.
1206. $a = 1/3$; $b = 6$; $m = 50$.
1207. $a = 1$; $b = 50$; $m = 20$.
1208. $a = 17$; $b = 84$; $m = 200$.

1209. Dans une progression arithmétique de 151 termes, le premier terme est 17 et la somme des termes est 8 229,5. Calculer le dernier terme et la raison.

1210. Dans une progression arithmétique le premier terme est 11, le dernier est 433 et la somme des termes vaut 47 064. Calculer le nombre de termes et la raison.

1211. Dans une progression arithmétique de 100 termes et de raison 4 la somme des termes vaut 18 900. Calculer les termes extrêmes.

1212. Dans une progression arithmétique le premier terme, la raison et la somme des termes valent respectivement 2; $\frac{1}{3}$ et 35. Calculer le nombre de termes et le dernier terme.

1213. Trouver 3 nombres en progression arithmétique connaissant leur somme 30 et leur produit 910.

1214. Trouver quatre nombres en progression arithmétique connaissant leur somme 35 et la somme de leurs carrés 334.

1215. Calculer les côtés d'un triangle rectangle sachant que leurs mesures sont en progression arithmétique et que le périmètre vaut $2p$. Discuter.
Application numérique : $p = 30$.

1216. Calculer les trois côtés d'un triangle sachant qu'ils sont en progression arithmétique, que le périmètre vaut $2p$ et que l'aire du triangle est m^2. Discuter.
Application numérique : $p = 45$; $m^2 = 150\sqrt{6}$.

1217. Montrer que si les nombres $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{c+a}$ et $\frac{1}{a+b}$ sont en progression arithmétique, il en est de même des nombres a^2, b^2 et c^2.

1218. 1° Démontrer l'identité : $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.
2° Remplacer x successivement par 0; 1; 2... n; ajouter les égalités obtenues et en déduire que la somme des cubes des n premiers nombres entiers est égale au carré de la somme de ces nombres.

Progressions géométriques.

— Calculer le $n^{ième}$ terme et la somme des termes d'une progression géométrique de raison q, dont le premier terme est a dans les cas suivants :

1219. $a = 1$; $q = 3$; $n = 5$. $\qquad a = 3$; $q = \frac{5}{3}$; $n = 7$.

1220. $a = 10$; $q = \frac{1}{2}$; $u = 10$. $\qquad a = 37$; $q = \frac{1}{10}$; $n = 6$.

1221. Trois nombres a; b; c sont en progression géométrique. Démontrer :
1° que les nombres a^2; b^2; c^2 sont en progression géométrique.
2° que les nombres a^p; b^p; c^p sont en progression géométrique.
3° que les nombres $\frac{1}{a^p}$; $\frac{1}{b^p}$; $\frac{1}{c^p}$ sont en progression géométrique.

1222. Démontrer que si trois nombres a; b; c sont à la fois en progression arithmétique et en progression géométrique on a : $a = b = c$.

1223. Les trois nombres x; 28; y sont en progression géométrique. Calculer x et y sachant que leur somme est 119.

1224. Calculer trois nombres en progression géométrique connaissant leur somme 19,5 et leur produit 125.

1225. Calculer trois nombres en progression géométrique connaissant leur somme 156 et la somme de leurs carrés 13 104.

1226. Les nombres x; 15; y sont en progression géométrique et les nombres x; 25; y sont en progression arithmétique. Calculer x et y.

1227. 1° q étant supérieur à 1, on pose $q = 1 + \alpha$ ($\alpha > 0$). Montrer que $(1 + \alpha)^2 > 1 + 2\alpha$ et $(1 + \alpha)^3 > 1 + 3\alpha$. En supposant vérifiée l'inégalité $(1 + \alpha)^{n-1} > 1 + (n - 1)\alpha$, déduire $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$.

Montrer alors que q^n augmente indéfiniment avec n.

2° Si $0 < q < 1$. On pose $q = \frac{1}{q'}$. En déduire que q^n tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

1228. 1° Une progression géométrique illimitée décroissante a pour premier terme a et pour raison q. Montrer qu'en élevant ses termes au carré on obtient encore une progression décroissante. Calculer la limite de la somme de ses termes en fonction de a et q.

2° Les sommes des termes des deux progressions précédentes ont pour limites respectives $\frac{15}{4}$ et $\frac{225}{24}$. Calculer a et q.

1229. Dans un triangle ABC le périmètre vaut $2p$ et l'aire m^2. On joint les milieux des côtés de ABC, on obtient un triangle A'B'C' dont on joint à nouveau les milieux des côtés et ainsi de suite indéfiniment.

1° Calculer la limite vers laquelle tend la somme des périmètres des triangles ABC, A'B'C'...

2° Calculer la limite vers laquelle tend la somme des aires de ces mêmes triangles.

1230. Dans un triangle ABC rectangle en A on donne la hauteur AH = h et le côté AB = c.

1° Calculer en fonction de c et h l'hypoténuse BC = a et le côté AC = b.

2° Quelle relation doit-il exister entre les données h et c pour que h, b, c, a soient les termes successifs d'une progression géométrique?

3° Se plaçant dans cette hypothèse et en supposant que AH est l'unité de longueur calculer c, b, et a.

LOGARITHMES DÉCIMAUX

323. Définition. — Considérons une progression géométrique (G) de raison a positive contenant le terme 1 et une progression arithmétique (A) de raison 1 contenant 0, ces deux progressions étant illimitées dans les deux sens.

Soit f une application de (G) dans (A) telle que : $f(a^n) = n$ pour tout n entier relatif :

(G)	$\dots a^{-n}$	$\dots a^{-2}$	a^{-1}	1	a	a^2	$\dots a^n$	$\dots$
(A)	$\dots -n$	-2	-1	0	1	2	$\dots n$	$\dots$

On appelle logarithme de base a d'un élément de* (G) *son correspondant dans* (A) *par l'application f.

Notation : $\log_a a^n = n$.

324. Logarithmes décimaux. — Si $a = 10$, les progressions s'écrivent :

(G)	$\dots 10^{-n}$	$\dots 10^{-2}$	10^{-1}	1	10	10^2	$\dots 10^n$	$\dots$
(A)	$\dots -n$	$\dots -2$	-1	0	1	2	$\dots n$	$\dots$

***Tout élément de* (A) *est le logarithme décimal de l'élément correspondant de* (G).**

Le logarithme décimal de x se note $\log x$.

Ainsi : $\boxed{\log 1 = 0}$ $\boxed{\log 10^n = n}$ $\boxed{\log 10^{-n} = -n}$.

On étend la définition à l'ensemble des nombres réels autres que les puissances entières de 10 en insérant des moyens géométriques et arithmétiques entre deux termes consécutifs dans (G) et (A) :

Étant donné l'entier naturel k, posons $\frac{1}{k} = r$ et $\sqrt[k]{10} = q$. On peut alors envisager les progressions plus étendues G' et A' telles que $G \subset G'$ et $A \subset A'$ et l'application :

(G')	$\dots q^{-n}$	$\dots q^{-2}$	q^{-1}	1	q	q^2	$\dots q^k = 10$	$\dots q^n$	$\dots$
(A')	$\dots -nr$	$\dots 2r$	$-r$	0	r	$2r$	$\dots kr = 1$	$\dots nr$	$\dots$

Par définition : $\boxed{\log q^n = nr}$. (1)

En prenant k assez grand, on conçoit la possibilité d'inclure tout réel x dans la progression (G'). Nous admettrons donc que :

Tout nombre réel positif x admet un logarithme décimal unique tel que :

$$x = x' \iff \log x = \log x' \qquad x < x' \iff \log x < \log x'.$$

Comme $\log 1 = 0$, $\log x$ est positif pour $x > 1$, négatif pour $x < 1$.

325. Propriétés des logarithmes.

1° ***Le logarithme d'un produit de facteurs positifs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.***

$$\boxed{\log abc = \log a + \log b + \log c}$$

Ce résultat se vérifie si a, b, c, figurent dans la progression (G')

car : $\quad a = q^\alpha, \quad b = q^\beta, \quad c = q^\gamma \quad \Longrightarrow \quad abc = q^{\alpha+\beta+\gamma}$

et $\log abc = (\alpha + \beta + \gamma)\,r = \alpha r + \beta r + \gamma r = \log a + \log b + \log c.$

2° ***Le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes de ses termes.***

$$x = \frac{a}{b} \iff a = bx \quad \text{donc} \quad \log a = \log b + \log x$$

$$\text{et } \log x = \log a - \log b \Longrightarrow \boxed{\log \frac{a}{b} = \log a - \log b}$$

En particulier : $\log \frac{1}{a} = \log 1 - \log a \Longrightarrow \boxed{\log \frac{1}{a} = -\log a}$.

3° ***Logarithme d'une puissance entière.*** — Si m est un entier positif :

$a^m = a\,a.\,...\,a$ (m facteurs) $\Longrightarrow \log a^m = \log a + ... + \log a$ (m termes).

Donc : $\boxed{\log a^m = m \log a}$.

Comme $\log a^{-p} = \log \frac{1}{a^p} = -\log a^p = -p \log a$, la formule précédente est valable pour tout entier relatif m.

4° ***Logarithme d'une racine.*** — Pour tout entier naturel n :

$$x = \sqrt[n]{a} \iff x^n = a \quad \text{donc} \quad n \log x = \log a$$

$$\log x = \frac{1}{n} \log a \Longrightarrow \boxed{\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a}.$$

En particulier : $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a, \quad \log \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3} \log a.$

Notons que $a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^4} \Longrightarrow \log a^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \log a^4 = \frac{4}{3} \log a.$

La formule $\log a^m = m \log a$ s'étend aux exposants fractionnaires positifs ou négatifs.

USAGE DES TABLES DE LOGARITHMES

326. Caractéristique et mantisse. — 1° Quel que soit $A > 0$, il existe un entier relatif p tel que :

$$10^p \leqslant A < 10^{p+1} \iff p \leqslant \log A < p + 1.$$

Le nombre p qui est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à log A est appelé *caractéristique* du nombre log A. Ainsi :

$A = 3\,585$ $\quad 10^3 < 3\,585 < 10^4 \iff 3 < \log 3\,585 < 4$ $\quad p = 3$

$A = 0{,}0015$ $\quad 10^{-3} < 0{,}0015 < 10^{-2} \iff -3 < \log 0{,}0015 < -2$ $\quad p = -3$

2° La relation $p \leqslant \log A < p + 1$ entraîne $\log A = p + m$ où m est un nombre décimal positif strictement inférieur à 1, appelé *mantisse* de log A.

$$\log A = \text{caractéristique} + \text{mantisse} = p + m \quad \text{avec } 0 \leqslant m < 1$$

327. Convention d'écriture.

1er cas : *p est positif* : $p = 3$ et $m = 0{,}57813 \Longrightarrow \log A = 3 + 0{,}57813$

On écrit normalement : $\boxed{\log A = 3{,}57813}$

2e cas : *p est négatif* : $p = -5$ et $m = 0{,}647832 \Longrightarrow \log A = -5 + 0{,}64732$

On convient d'écrire : $\boxed{\log A = \bar{5}{,}64732}$

en plaçant le signe — au-dessus de la caractéristique de log A pour se rappeler que seule la caractéristique 5 est négative, la mantisse 0,64732 étant positive. En résumé :

Tout logarithme décimal est la somme de sa partie entière positive ou négative (caractéristique) et de sa portie décimale positive (mantisse).

328. Recherche de la caractéristique de log A. — Elle a été définie par : $10^p \leqslant A < 10^{p+1}$.

1er cas : $A \geqslant 1$. Le nombre de chiffres de la partie entière de A est $p + 1$.

Ainsi : $\quad 10^3 = \underbrace{1\,000}_{4\text{ chiffres}} < \underbrace{1\,283}_{4\text{ chiffres}} < \underbrace{5\,683{,}2}_{4\text{ chiffres}} < 10^4 = \underbrace{10\,000}_{5\text{ chiffres}}$

La caractéristique de log A ***s'obtient en retranchant*** 1 ***au nombre de chiffres de la partie entière du nombre*** A.

2e cas : $A < 1$. — La caractéristique de log A est négative. On peut écrire :

$$10^{-n} < A < 10^{-n+1}$$

où n désigne le rang du premier chiffre significatif non nul après la virgule dans A. Dans ce cas, $p = -n$. Ainsi :

$$10^{-4} < 0{,}00015 < 10^{-3} \Longrightarrow \log 0{,}00015 = \bar{4}, \ldots$$

La caractéristique du logarithme d'un nombre décimal* A < 1 *est le rang affecté du signe —, de son premier chiffre significatif non nul après la virgule.

C'est également, affecté du signe —, le nombre des zéros qui précèdent le premier chiffre significatif.

EXEMPLES. — A = 0,5632 $\quad\log A = \bar{1},...$
A = 0,00843 $\quad\log A = \bar{3},...$

329. Recherche de la mantisse de log A. — Les *tables de logarithmes usuelles* donnent avec 5 décimales, les mantisses des logarithmes des nombres entiers de 1 à 10 000. Pour les autres on fait usage de la règle suivante :

La mantisse du logarithme d'un nombre ne change pas quand on multiplie ou quand on divise ce nombre par une puissance de 10.

En effet, si $\log A = p + m$

$\log(A \times 10^n) = \log A + \log 10^n = p + m + n = (p + n) + m$

la caractéristique devient $p + n$, la mantisse m est inchangée.

Ainsi log 57,92 a même mantisse que log 5 792 (qui se trouve dans la table).

330. Problème I. — ***Trouver le logarithme d'un nombre donné.***

1er EXEMPLE. — *Le nombre comprend* 4 *chiffres significatifs au plus* : A = 0,05679.

La caractéristique est $\bar{2}$. Dans la table, en regard de 5 679 on lit la mantisse (en cent millièmes) : 75 427. Donc log 0,05679 = $\bar{2}$,75427.

2e EXEMPLE. — Le nombre comprend plus de 4 chiffres significatifs. On procède par interpolation linéaire : A = 780,12.

La caractéristique est 2. La mantisse est la même que celle de log 7801,2.

La table donne : 7 802 ⟶ 89 221
7 801 ⟶ 89 215
D = 6

en admettant que l'accroissement de log x soit proportionnel à celui de x, l'accroissement de la mantisse quand on passe de 7801 à 7801,2 est : 6 × 0,2 = 1,2. D'où log 780,12 = 2,89216 (par défaut). Ce qui conduit à la disposition pratique :

log 780,1	= 2,89 215		
pour 2	12		D = 6
log 780,12	= 2,89 216		

3e EXEMPLE. — *Logarithme d'un rapport trigonométrique.*

Les tables de logarithmes donnent directement les logarithmes du sinus, de la tangente, de la cotangente et du cosinus des angles du premier quadrant exprimés en degrés et minutes (ou en grades et centigrades). La correction pour les secondes se déduit de la différence tabulaire algébrique D qui est la correction pour 60″. Pour n'', on a donc la correction $\frac{D \times n}{60}$. Soit à calculer log cos 61°23′48″.

log cos 61°23′	= $\bar{1}$,68 029	D = − 23
40″	− 15,3	
8″	− 3,1	
log cos 61°23′48″	= $\bar{1}$,680106	soit $\bar{1}$,68 011

331. Problème II. — ***Trouver un nombre connaissant son logarithme.***

1er Exemple. — *La mantisse figure dans la table* : $\log x = \bar{2},65963$.

En regard de la mantisse 65963, on lit dans la table 4 567. La caractéristique étant − 2, le 1er chiffre significatif 4 doit occuper le 2e rang après la virgule dans x.

Donc : $x = 0,04567$.

2e Exemple. — *La mantisse ne figure pas dans la table* : $\log x = 4,97024$.

En regard de 97 021 on lit le nombre 9 337 } D = 025 − 021 = 4
— de 97 025 — 9 338 } δ = 024 − 021 = 3.

Pour une augmentation de D = 4 le nombre augmente de 1. Pour une augmentation de δ = 3 ce nombre augmente de 3 : 4 = 0,75.

La caractéristique étant 4, $x = 93377,5$ d'où la disposition pratique :

Pour	97 021		N =	9337	D = 4
Correction pour	3			0,75	δ = 3
Pour	97 024		N =	9337,75	
log x =	4,97 024	⟹	x =	93 337,5	

3e Exemple. — *Cas d'un rapport trigonométrique* : $\log \operatorname{tg} x = \bar{1},78627$.

Soit à déterminer x en degrés tel que $\log \operatorname{tg} x = \bar{1},78627$.

pour log tg α = $\bar{1}$,78 618		α = 31°26′	D = 29
correction pour	4,8	10″	δ = 9
—	4,4	9″	
pour log tg α = $\bar{1}$,78 627		α = 31°26′19″	

N. B. Si le lecteur n'a pas entre les mains une table de logarithmes à 5 décimales il pourra, suivant les mêmes principes, utiliser la petite table à 4 décimales des pages 344 et 345 en se servant, si besoin est, des tables de valeurs naturelles des fonctions circulaires.

CALCULS LOGARITHMIQUES

332. Addition de logarithmes. — On ajoute les mantisses et la retenue positive (s'il en existe une) s'ajoute à la somme algébrique des caractéristiques.

Exemple. — La somme $4,40712 + \bar{3},85789 + \bar{5},30703$ peut s'écrire

$(4 - 3 - 5) + (0,40712 + 0,85789 + 0,30703) = (4 - 3 - 5 + 1) + 0,57204$.

Pratiquement on dispose l'opération comme ci-contre :

$$\begin{array}{r} 4,40712 \\ \bar{3},85789 \\ \bar{5},30703 \\ \hline \bar{3},57204 \end{array}$$

333. Cologarithme. — ***On appelle cologarithme d'un nombre, le logarithme de son inverse.***

$$\operatorname{colog} a = \log \frac{1}{a} = \log 1 - \log a = -\log a \implies \boxed{\operatorname{colog} a = -\log a}$$

Le cologarithme est donc l'opposé du logarithme.

Pour retrancher le logarithme d'un nombre il suffit d'ajouter le cologarithme de ce nombre.

Ainsi : $$\boxed{\log \frac{a}{b} = \log a + \operatorname{colog} b}$$

CALCUL DU COLOGARITHME. — Soit $\log a = \bar{2},45\,088$

$$\operatorname{colog} a = -(-2 + 0,45\,088) = 2 - 0,45\,088$$
$$\operatorname{colog} a = 1 + (1 - 0,45\,088) = 1,54\,912$$

La caractéristique d'un cologarithme s'obtient en ajoutant 1 à la caractéristique du logarithme et en changeant le signe du nombre obtenu. La mantisse s'obtient en retranchant de 9 les chiffres de la mantisse sauf le dernier chiffre significatif à droite que l'on retranche de 10.

EXEMPLE. — *Soit à calculer* : $\log \frac{5}{\pi} = \log 5 + \operatorname{colog} \pi$.

On lit dans la table : $\log 5 = 0,69\,897$ $\quad \log \pi = 0,49\,715$

d'où : $\operatorname{colog} \pi = \bar{1},50\,285$

Soit : $\log \frac{5}{\pi} = 0,20\,182$

334. Multiplication et division d'un logarithme par un entier positif. — Il n'y a pas de difficultés si le *logarithme est positif*. Si le *logarithme est négatif* on opère comme suit :

1er EXEMPLE. — $\bar{2},37\,826 \times 5 = (-2 + 0,37\,826) \times 5$
$= -10 + 1,89\,130 = \bar{9},89\,130.$

2e EXEMPLE. — La caractéristique est un multiple du diviseur :

$$\frac{\bar{6},81\,705}{3} = \frac{-6 + 0,81\,705}{3} = \bar{2},27\,235.$$

3e EXEMPLE. — La caractéristique n'est pas un multiple du diviseur :

$$\frac{\bar{3},90\,309}{5} = \frac{-3 + 0,90\,309}{5}.$$

On retranche 2 à la caractéristique et on ajoute 2 à la mantisse :

$$\frac{\bar{3},90\,309}{5} = \frac{-5 + 2,90\,309}{5} = -1 + 0,580\,618 = \bar{1},58\,062.$$

REMARQUE. — Si le multiplicateur ou le diviseur ne sont pas des nombres entiers on opère comme pour les nombres relatifs :

$$\bar{8},65\,648 : 2,54 = -\frac{7,24\,352}{2,54} = -2,85\,178 = \bar{3},14\,822.$$

335. — Calculs par logarithmes. — Les propriétés des logarithmes trouvent leur application dans tout calcul portant sur des expressions contenant comme seules opérations des multiplications, divisions, puissances ou racines.

Ainsi pour calculer $x = \frac{A^3 \sqrt[5]{B}}{C^7}$ on détermine log A, log B, log C puis on calcule :

$\log x = 3 \log A + \frac{1}{5} \log B + 7 \operatorname{colog} C$, ce qui permet de déterminer x.

On peut ainsi effectuer d'une façon suffisamment approchée des calculs pratiquement inabordables directement.

336. Exemple. — *Calculer* : $x = \frac{(1,7)^4 \cdot \sqrt[3]{0,7\,503}}{0,27\,725}$.

On obtient : $\log x = 4 \log 1,7 + \frac{1}{3} \log 0,7\,503 + \operatorname{colog} 0,27\,725.$

Calculs auxiliaires		*Calculs définitifs*	
log 1,7 = 0,23 045		4 log 1,7 = 0,92 180	
log 0,7 503 = $\bar{1}$,87 523		$\frac{1}{3}$ log 0,7 503 = $\bar{1}$,95 841	
= $\bar{3}$ + 2,87 523		colog 0,27 725 = 0,55 713	
log 0,2 772 = $\bar{1}$,44 279	D = 16	log x = 1,43 734	
pour 5 = 8		pour 43 727 N = 2 737	D = 16
log 0,27 725 = $\bar{1}$,44 287		pour 6,4 4	
		0,6 4	
		d'où 43 734 N = 273744	

$$x = 27,374$$

EXERCICES

— Calculer le logarithme des deux membres dans les égalités suivantes :

1231. $x = a^3b^2c.$ **1232.** $x = 6a^5b^3c^2.$ **1233.** $x = 10a\sqrt{b}.$

1234. $x = \frac{3a^2b}{c}.$ **1235.** $x = \frac{12a\sqrt{b}\sqrt[3]{c}}{m^5}.$ **1236.** $x = \sqrt[5]{\frac{a^3b^2}{c^4}}.$

— Démontrer les égalités suivantes :

1237. $\log(x^2 - y^2) = \log(x + y) + \log(x - y).$

1238. $\log(x^3 - y^3) = \log(x - y) + \log(x^2 + xy + y^2).$

1239. $\log(x^3 + y^3) = \log(x + y) + \log(x^2 - xy + y^2).$

1240. $\log(x^4 + 1) = \log(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + \log(x^2 - x\sqrt{2} + 1).$

1241. $\log(\sin 2x) - \log 2 = \log(\sin x) + \log(\cos x).$

— Résoudre les équations :

1242. $\log(2x + 11) + \log(x + 2) = 2 \log 15.$

1243. $\log(5x + 1) - \log(x - 2) = \log(3x + 7).$

1244. $a^x = b$ (a et b nombres positifs donnés).

— Résoudre les systèmes :

1245. $\begin{cases} x + y = a \\ \log x + \log y = \log b \end{cases}$ a et b nombres donnés. Application : $a = 18;\ b = 77.$

1246. $\begin{cases} 2^x + 3^y = 1\,105 \\ 2^x - 3^y = 943 \end{cases}$ **1247.** $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ \log x - \log y = \log 7. \end{cases}$

— A l'aide de la table, donner le logarithme des nombres suivants :

1248. 1° 78,137 2° 34 715,7 3° 0,897 839.

1249. 1° 587,682 2° 6 453,62 3° 0,084 327.

1250. 1° sin 23° 46′ 50″ 2° tg 65° 47′ 30″ 3° cos 42° 34′ 50″.

1251. 1° sin 54,347 gr. 2° cotg 76,873 gr. 3° tg 29,384 gr.

— Trouver les nombres ayant pour logarithmes :

1252. 1° 5,64 266 2° $\bar{1}{,}52\,009$ 3° 0,19 033.

1253. 1° 2,58 121 2° $\bar{3}{,}89\,935$ 3° 4,88 080.

1254. 1° 3,47 876 2° $\bar{2}{,}54\,359$ 3° 0,23 508.

1255. Trouver l'arc x en degrés ou en grades tel que :
1° $\log \sin x = \bar{1}{,}65\,321$ 2° $\log \operatorname{tg} x = \bar{1}{,}76\,745$ 3° $\log \cos x = \bar{1}{,}43\,642$.

1256. Même exercice pour :
1° $\log \sin x = \bar{1}{,}83\,642$ 2° $\log \operatorname{tg} x = 0{,}21\,643$ 3° $\log \operatorname{cotg} x = \bar{1}{,}84\,728$.

1257. Déterminer la valeur naturelle du sinus, du cosinus et de la tangente d'un arc
$\alpha = 32^\circ\,43'\,54''$.

1258. Reprendre l'exercice précédent pour :
67° 28′ 43″ 34,746 grades 73,4385 grades.

1259. Calculer les cologarithmes des nombres ayant pour logarithmes :
1,42 712, 3,26 095, 2,72 439, 0,08 207, $\bar{1}{,}26\,403$.

1260. Calculer les cologarithmes des nombres :
340,6, 25 710, 4,362, 0,7 234, 0,03 704.

— Faire les opérations suivantes sur les logarithmes :

1261. $1{,}12\,423 \times 2$, $\bar{2}{,}56\,025 \times 3$, $\bar{1}{,}82\,708 \times 5$, $\bar{1}{,}06\,715 \times 4$.

1262. $2{,}18\,646 : 3$, $\bar{3}{,}35\,428 : 3$, $\bar{4}{,}12\,536 : 3$, $\bar{1}{,}56\,084 : 4$.

— Calculer par logarithmes les expressions suivantes :

1263. $4\,630 \times 285$, $76{,}25 \times 12{,}04$, $24{,}9 \times 0{,}0125$, $31\,200 \times 7{,}342$.

1264. $7\,375 \times 493{,}7$, $0{,}272 \times 5{,}717$, $37{,}412 \times 0{,}857$, $46{,}5 \times \pi$.

1265. $12{,}24 \times 825{,}7 \times 0{,}324$, $5 \times 12{,}7 \times 475 \times \pi$, $3 \times 1{,}732 \times 4{,}12 \times 0{,}02$.

1266. $(27{,}09)^2$, $(4{,}31)^3$, $(37{,}41)^4$, $(15{,}702)^3$, $(27{,}486)^5$.

1267. $\dfrac{27}{7{,}31}$, $\dfrac{24}{4\,703}$, $\dfrac{11}{78{,}57}$, $\dfrac{0{,}1\,234}{27{,}5}$, $\dfrac{0{,}8\,584}{3{,}2\,575}$.

1268. $\dfrac{24 \times 17{,}36}{15{,}3}$, $\dfrac{0{,}7 \times 1\,874}{11}$, $\dfrac{4{,}5^2 \times \pi}{16}$, $\dfrac{(0{,}792)^3}{1{,}53}$.

1269. $\sqrt{42{,}84}$, $\sqrt[3]{371}$, $\sqrt[4]{12\,709}$, $\sqrt[5]{77{,}275}$.

1270. $\dfrac{\sqrt{33{,}7 \times 1{,}7\,139}}{0{,}33}$, $\dfrac{17 \times \pi \times \sqrt{0{,}037}}{57{,}812}$, $\pi\sqrt{\dfrac{12{,}25}{7{,}12}}$, $\sqrt{\dfrac{25{,}2}{8\pi}}$.

1271. $\dfrac{103^2 \times \sqrt[3]{7{,}009}}{3{,}2\,052^2}$, $\dfrac{2{,}4 \times \sqrt[3]{19 \times 0{,}26^2}}{4{,}1 \times \sqrt{52}}$, $\dfrac{16\sqrt{2}}{\pi} \times \sqrt{\dfrac{752}{981}}$.

1272. Dans une progression géométrique de raison 3, le 1er terme est 27 et le dernier 19 683. Quel est le nombre de termes ?

1273. Dans une progression géométrique, on connaît le 1er terme a, le dernier l et la somme des termes S. Calculer la raison et le nombre de termes.
Application numérique : $a = 2$, $l = 39\,366$, $S = 59\,048$.

1274. Quel est le rayon d'un cercle dont l'aire est 1 mètre carré ?

1275. Calculer le rayon de base d'un cylindre de révolution dont la hauteur est double du rayon de base et dont le volume est 1 dm^3.

1276. Dans un cône de révolution la hauteur est le triple du rayon de base et le volume est 147 dm^3. Calculer le rayon de base.

1277. Calculer les dimensions du kilogramme-étalon sachant qu'il a la forme d'un cylindre de révolution, dont la hauteur est égale au diamètre, et que la densité du platine est 21,615.

1278. Calculer le rayon d'une sphère en acier ($d = 7{,}8$) pesant 1 kg.

1279. Quelle est la durée de l'oscillation d'un pendule simple de longueur 1 m, dans un lieu où l'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}81$ m/s^2.

On sait que la période du pendule T en secondes est donné par la formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ l longueur en mètres et g accélération de la pesanteur en mètres/seconde par seconde.

1280. La résistance R (en ohms) d'un conducteur de longueur l (en mètres), de sections s (en cm^2), de résistivité ρ (en Ω-cm-cm^2) est donné par la formule : $R = \frac{\rho l}{s}\cdot$ Déterminer la résistance d'un fil en nickel-chrome : $\rho = 112 \cdot 10^{-6}$ Ω-cm-cm^2, de diamètre 8/10 mm, de longueur 27 m.

1281. Quelle doit être la longueur d'un fil de maillechort de diamètre : 1,2 mm, nécessaire pour obtenir une résistance de rhéostat de valeur 2 Ω. (Résistivité du maillechort 33.10^{-6} Ω-cm-cm^2.)

1282. Pour déterminer le diamètre d'un arbre de transmission travaillant à la torsion, on utilise la relation :

$$D = 96\sqrt[4]{\frac{P}{n}}$$

D diamètre de l'arbre en mm.
P puissance transmise en chevaux-vapeur.
n nombre de tours par minute.

Calculer le diamètre d'un arbre tournant à raison de 240 tours par minute et transmettant une puissance de 15 chevaux.

1283. Pour sa récompense, l'inventeur du jeu d'échecs demanda, paraît-il, un grain de blé pour la 1re case, 2 grains pour la seconde, 4 pour la 3e, 8 pour la 4e et ainsi de suite jusqu'à la 64e, en doublant à chaque fois le nombre de grains.

1° Calculer le nombre de grains de blé nécessaire (avec 5 chiffres significatifs seulement).

2° Sachant qu'un litre de blé contient en moyenne 15 000 grains, qu'un hectolitre de blé pèse environ 80 kg, déterminer le nombre de trains (à 500 tonnes de charge utile chacun) nécessaires pour transporter ce blé.

1284. On considère un triangle ABC où $a + b + c = 2p$ et on rappelle les formules (11e leçon) :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A = pr = (p-a)\,r_a = \frac{abc}{4R}$$

et

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

1° En déduire les formules suivantes : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$ (1)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{r}{p-a} = \frac{S}{p(p-a)} \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}. \quad (3)$$

2° Sachant que $a = 235{,}6$; $b = 179{,}2$; $c = 143{,}5$, calculer p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, puis par logarithmes S, h_a, r, r_a, R, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ et les angles A, B, C en degrés.

3° Vérifier les valeurs trouvées à l'aide des formules (1) et (3).

— Utiliser les formules calculables par logarithmes (1), (2) ou (3) précédentes, résoudre un triangle ABC. On déterminera les éléments inconnus A, B, C, a, b, c et l'aire S, connaissant :

1285. $a = 257{,}2$; $B = 61° 28'$; $C = 38° 17'$.

1286. $A = 102° 24$; $b = 236{,}7$; $c = 192{,}5$.

1287. $a = 348{,}5$; $B = 72{,}6$ gr; $C = 48{,}06$ gr.

1288. $A = 42° 38$; $a = 201{,}6$; $b = 254{,}1$ (2 sol.).

1289. $a = 452{,}3$; $b = 340{,}7$; $c = 292{,}6$.

1290. $A = 89{,}65$ gr; $a = 324{,}6$; $b = 238{,}4$ (1 sol).

N. B. *On pourra résoudre par logarithmes les exercices* n°s 692 *à* 710 *et* 1334 *à* 1358.

INTÉRÊTS COMPOSÉS - ANNUITÉS

337. Intérêt simple. — Lorsque le propriétaire d'une somme d'argent A, appelée *capital*, prête cette somme à une seconde personne, cette dernière doit lui payer un certain loyer appelé *intérêt*. Le capital A a été placé. Le *taux* r du placement est l'intérêt annuel d'un capital de 1 F : un taux de 5 % ou 5/100 équivaut à $r = 0{,}05$.

Dans les placements à intérêt simple, l'intérêt total I est, à un taux donné, proportionnel au capital A et à la durée du placement.

L'intérêt annuel i d'un capital A est donc : $i = r \times A \implies \boxed{i = Ar}$

L'intérêt total au bout de n années est par suite : $\boxed{I = Arn}$

338. Intérêts composés. — ***Une somme est placée à intérêts composés lorsqu'à la fin de chaque année le capital s'augmente de l'intérêt produit pendant l'année écoulée.***

On dit que les intérêts sont *capitalisés* à la fin de chaque année.

A la fin de la première année le capital A devient : $A + Ar = A(1 + r)$.

A la fin de la seconde année, il devient de même $[A(1 + r)](1 + r) = A(1 + r)^2$, et ainsi de suite.

A la fin de la $n^{\text{ième}}$ année, le capital S ainsi constitué est donc :

$$\boxed{S = A(1 + r)^n} \qquad (1)$$

On en déduit :

$$\boxed{\log S = \log A + n \log(1 + r)} \qquad (2)$$

Ces relations permettent de calculer l'une des quantités S, A, r, n connaissant les trois autres. On obtient un calcul plus facile et plus précis en utilisant des *tables financières* qui donnent $\log(1 + r)$ avec 7 décimales ou les valeurs de $(1 + r)^n$ pour les taux usuels de 3 à 6 % et pour les valeurs de n de 1 à 50 (page 348).

339. Exemples. — 1° *Quel capital* S *obtient-on en plaçant à intérêts composés au taux de* 5 % *une somme de* 2 000 F *pendant* 25 *ans ?*

$A = 2\,000$ F, $r = 0{,}05$ et $n = 25$. On trouve dans la table de $(1 + r)^n$: $(1{,}05)^{25} = 3{,}386\,355$. Donc $S = 2\,000 \text{ F} \times 3{,}386\,355 = \underline{6\,772{,}71 \text{ F}}$.

2° *Quelle somme* A, *un père doit-il placer à intérêts composés au taux de* 4,5 %, *le jour de la naissance de son fils s'il veut lui assurer à sa majorité un capital de* 50 000 F ?

S = 50 000 F, $r = 0{,}045$ et $n = 21$. La table $(1 + r)^n$ donne $(1{,}045)^{21} = 2{,}520\,241$

$$A = \frac{50\,000 \text{ F}}{2{,}520\,241} \Longrightarrow \log A = \log 50\,000 + \operatorname{colog} 2{,}520\,241$$

$$\log A = 4{,}69\,897 + \bar{1}{,}59\,851 = 4{,}297\,48$$

On trouve : $A = \underline{19\,837{,}30 \text{ F.}}$

340. — Remarque. — Si la durée du placement n'est pas un nombre exact d'années on convient, pour faciliter les calculs, d'appliquer les formules du n° 338 en exprimant n en fraction d'année (1 an = 12 mois = 360 jours).

$$5 \text{ ans } 7 \text{ mois } 13 \text{ jours} \Longrightarrow n = 5 + \frac{7}{12} + \frac{13}{360} = \frac{2\,023}{360}.$$

EXEMPLE. — *Au bout de combien de temps un capital* A *placé à* 4 % *à intérêts composés se trouve-t-il doublé?*

$$S = 2\,A \quad \text{et} \quad r = 0{,}04. \quad \text{On obtient } n = \frac{\log S - \log A}{\log (1 + r)} = \frac{\log 2}{\log 1{,}04} = \frac{0{,}30\,103}{0{,}01\,703}$$

d'où : $n = \dfrac{30\,103}{1\,703} = \underline{17 \text{ ans } 8 \text{ mois } 3 \text{ jours.}}$

341. Annuités. — ***On appelle annuité la somme*** a ***à verser chaque année soit en vue de constituer un capital, soit en vue d'amortir une dette.***

On suppose que le capital réalisé ou amorti est placé à intérêts composés pendant la durée de sa constitution ou de son amortissement.

342. Constitution d'un capital. — *L'annuité* a *est versée au début de chaque année et* S *est le capital constitué à la fin de la* $n^{\text{ième}}$ *année.*

La première annuité a reste placée pendant n années et constitue un capital S_1 tel que (n° 338) : $S_1 = a\,(1 + r)^n$

La deuxième annuité a reste placée pendant $(n - 1)$ années et constitue un capital S_2 tel que : $S_2 = a\,(1 + r)^{n-1}$

Et ainsi de suite.

La $n^{\text{ième}}$ annuité a reste placée 1 an et constitue $S_n = a\,(1 + r)$.

Le capital S ainsi réalisé, à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année, est donc :

$$S = a\,(1 + r)^n + a\,(1 + r)^{n-1} + \dots + a\,(1 + r)^2 + a\,(1 + r)$$
$$S = a\,(1 + r)\,[1 + (1 + r) + (1 + r)^2 + \dots + (1 + r)^{n-1}]$$

L'expression entre crochets est la somme des termes d'une progression géométrique de n termes, dont la raison est $1 + r$ et le premier terme 1. Donc (n° 321) :

$$\boxed{S = a(1 + r) \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}} \qquad (3)$$

La table (page 349) donne les valeurs de $(1+r).\frac{(1+r)^n-1}{r}$ pour les taux usuels et les valeurs de n de 1 à 50. On utilisera la formule :

$$\log S = \log a + \log \left[(1+r)\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r}\right] \qquad (4)$$

On peut ainsi calculer l'une des quantités S, a, r, et n connaissant les trois autres.

343. Exemples. — 1° *Un père verse à chacun des* 20 *premiers anniversaires de sa fille une somme de* 2 000 F, *qu'il place à intérêts composés au taux de* 4,5 %. *Quelle est la dot ainsi constituée à la jeune fille le jour de ses* 21 *ans ?*

L'annuité est $a = 2\,000$ F,

$$n = 20 \quad \text{et} \quad r = 0{,}045 \implies S = 2\,000 \text{ F} \times 1{,}045 \times \frac{(1{,}045)^{20}-1}{0{,}045}$$

soit en utilisant la table (page 349) : S = 2 000 F × 32,79 314 = 65 566,28 F.

2° *Quelle annuité a doit-on placer au début de chaque année, à intérêts composés au taux de* 3 %, *pour constituer en* 30 *ans un capital de* 50 000 F ?

$$S = 50\,000 \text{ F},\ n = 30 \quad \text{et} \quad r = 0{,}03 \implies (1+r)\,.\,\frac{(1+r)^{30}-1}{r} = 49{,}00\,268.$$

La formule (4) permet d'écrire :

$$\log a = \log 50\,000 + \text{colog}\ 49{,}00\,268$$
$$\log a = 4{,}69\,897 + \bar{2}{,}30\,978 = 3{,}00\,875.$$

D'où : $a = 1\,020{,}10$ F.

Pratiquement on pourrait prendre $a = 1\,000$ F, ce qui donnerait un capital de 49 002,68 F et compléter à la fin de la 30e année par un versement supplémentaire de 997,32 F.

3° *Pendant combien d'années doit-on placer à intérêts composés au taux de* 5 % *une annuité de* 2 000 F *pour obtenir un capital de* 100 000 F ?

S = 100 000 F, $a = 2\,000$ et $r = 0{,}05$. La formule (3) s'écrit :

$$\frac{S}{a} = (1+r)\,\frac{(1+r)^n-1}{r} \implies p = 1{,}05\ \frac{1{,}05^n-1}{0{,}05} = 50.$$

Dans la table on voit que $n = 24 \implies p = 46{,}72\,710$ et $n = 25 \implies p = 50{,}11\,345$.

Il faut donc prendre $n = 25$ et on obtient ainsi un capital de :

2 000 F × 50,11 345 = 100 226,90 F.

Remarque. — En réalité le capital de 100 000 F est atteint avant la fin de la 25e année. Pour $n = 24$ on dispose de : 2 000 F × 46,72 710 = 93 454,20. La 25e annuité porte ce capital à 95 454,20. Il suffit alors de le laisser placé pendant une fraction x d'année telle que (n° 340) :

$$95\,454{,}20 \times (1{,}05)^x = 100\,000 \implies x = \frac{\log 100\,000 + \text{colog}\ 95\,454{,}2}{\log 1{,}05}$$

d'où :

$$x = \frac{5 + \bar{5}{,}02\,020}{0{,}02\,11\,9} = \frac{2\,020}{2\,119}\ \text{année} = 11 \text{ mois } 14 \text{ jours}.$$

Après 25 versements de 2 000 F au début de chaque année on dispose d'un capital de 100 000 F au bout de 24 ans 11 mois 14 jours.

344. Amortissement d'une dette. — *Il s'agit, en versant en fin de chaque année une annuité a, de rembourser en n années, capital et intérêts composés réunis, un emprunt* A *effectué au début de la première année.*

Comme le remboursement commence dès la fin de la 1re année la somme des n annuités a n'est pas égale à $S = A(1+r)^n$. Mais cette somme S est le capital que doit pouvoir réaliser le prêteur à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année en replaçant, dès sa réception, chaque annuité a au même taux r que celui de l'emprunt. Ainsi :

La 1re annuité a placée $(n-1)$ années devient : $S_1 = a\,(1+r)^{n-1}$

La 2e annuité a placée $(n-2)$ années devient : $S_2 = a\,(1+r)^{n-2}$

Et ainsi de suite jusqu'à la dernière annuité : $S_n = a$

Le capital S réalisé serait donc à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année

$$S = a\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + (1+r) + 1\right] = a\,\frac{(1+r)^n - 1}{r}. \qquad (5)$$

Cette somme S doit être égale à $A\,(1+r)^n$, comme si le capital A avait été placé à intérêts composés au taux r pendant n années. Il en résulte que :

$$a\,\frac{(1+r)^n-1}{r} = A\,(1+r)^n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = \frac{Ar\,(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}} \qquad (6)$$

A et r étant généralement fixés au départ, cette formule détermine a connaissant n ou n connaissant a.

345. Calcul d'une annuité d'amortissement. — On connaît A, r et n. Il s'agit de trouver l'annuité a. Si nous disposons de tables de $(1+r)^n$ et $(1+r)$. $\frac{(1+r)^n - 1}{r}$ nous pouvons écrire la formule (6) sous la forme :

$$a = A \cdot (1+r)^{n+1} \cdot \frac{r}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]} \qquad \text{ce qui entraîne :}$$

$$\boxed{\log a = \log A + \log\,(1+r)^{n+1} + \operatorname{colog}\left[(1+r)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right].} \qquad (7)$$

Exemple. — *On veut rembourser, en* 25 *ans, un emprunt de* 35 000 F *au taux de* 6 % *à intérêts composés. Calculer l'annuité a à verser en fin de chaque année.*

$A = 35\,000$ F, $r = 0{,}06$ et $n = 35$. Les tables donnent :	$\log A = 4,\ 54\,407$
$m = (1{,}06)^{36} = 8{,}147\,252$ et $p = 1{,}06\,.\,\frac{(1{,}06)^{35} - 1}{0{,}06} = 118{,}12\,087$	$\log m = 0,\ 91\,104$
d'où $\log p = 2{,}07\,233$ et le calcul ci-contre :	$\operatorname{colog} p = \bar{3},\ 92\,767$
Donc $a = 2\,414{,}22$ F.	$\log a = 3,\ 38\,278.$

Si on ne dispose pas de tables donnant $m = (1+r)^{n+1}$ et $p = (1+r)\,\frac{(1+r^n) - 1}{r}$, il faut procéder en deux temps à l'aide de la table de logarithmes en calculant :

$(1+r)^n$ par la formule $\log\,(1+r)^n = n \log\,(1+r)$ d'où $(1+r)^n - 1$

puis a par la formule $\log a = \log A + \log r + \log\,(1+r)^n + \operatorname{colog}\left[(1+r)^n - 1\right]$.

346. Durée d'un amortissement. — On connaît A, a et r. La formule (6) s'écrit :

$$(1 + r)^n (a - Ar) = a \quad \Longrightarrow \quad \boxed{(1 + r)^n = \frac{a}{a - Ar}} \cdot \qquad (8)$$

Il n'y a pas, en général, de valeur entière de n vérifiant cette relation. Voyons sur un exemple comment on opère.

EXEMPLE. — *Un particulier rembourse au Crédit foncier un emprunt de* 80 000 F, *à intérêts composés à* 5 %, *par des versements annuels de* 10 000 F. *Étudier comment il achève de se libérer de sa dette.*

$$A = 80\,000,\ a = 10\,000 \text{ F et } r = 0{,}05 \Longrightarrow \frac{a}{a - Ar} = \frac{10\,000}{10\,000 - (8\,000 \times 0{,}05)} = 1{,}66\,666...$$

Dans la table $(1 + r)^n$ on voit que 1,66... s'insère entre $(1{,}05)^{10} = 1{,}628\,895$ et $(1{,}05)^{11} = 1{,}710\,339$.
Au bout de 10 ans, les 10 annuités versées constituent à intérêts composés un capital :

$$S = a\,\frac{(1 + r)^{10} - 1}{r} = 10\,000 \text{ F} \times \frac{0{,}628\,895}{0{,}05} = 125\,779 \text{ F}.$$

Au même moment l'emprunt A constitue de même un capital :

$$A\,(1 + r)^{10} = 80\,000 \text{ F} \times 1{,}628\,895 = 130\,311{,}60 \text{ F}.$$

La dette amortie, après 10 annuités, est donc : 4 532,60 F.
Si le particulier ne s'en libère qu'à la fin de la 11e année, il lui faudra effectuer un 11e versement de : 4 532,50 F × 1,05 = 4 623,25 F.

ÉCHELLES LOGARITHMIQUES

347. Échelle métrique. — Considérons un axe Ox, dont le vecteur unitaire $\vec{i}$ a pour module le *cm* et une longueur donnée l. A tout réel X associons sur l'axe Ox le point M d'abscisse $x = l$X. Nous pouvons graduer l'axe Ox, à la façon d'un double décimètre en inscrivant les cotes X des graduations principales. Nous obtenons ainsi ***une échelle métrique de module*** l, sur laquelle nous pouvons lire directement la valeur X correspondant à tout point M (on interpole à vue si besoin est). Ainsi (fig. 151) :

$$X_A = 1; \qquad X_B = 2; \qquad X_C = -0{,}85; \qquad X_M = 1{,}72.$$

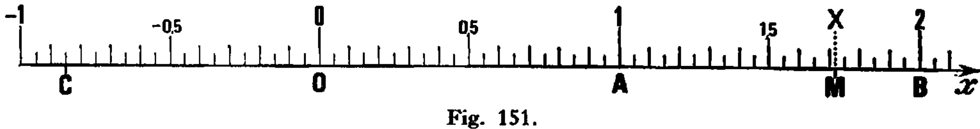


Fig. 151.

La relation : $\overrightarrow{OM} = X\,\overrightarrow{OA}$ montre que :

Une échelle métrique de module l n'est autre qu'un axe gradué dont le vecteur unitaire $\overrightarrow{OA}$ a pour module l.

L'échelle L de la règle à calcul (fig. 157) est une échelle métrique dont le module est 25 mm.

348. Échelle logarithmique. — Sur l'axe Ox tel que $|\vec{i}| = 1$ cm, convenons cette fois d'associer à tout réel positif X le point M d'abscisse $x = \overline{OM} = l \log X$. Nous pouvons de même graduer l'axe Ox suivant les valeurs de X. Nous obtenons une *échelle logarithmique* X dont le *module* l est la distance séparant les graduations $X = 1$ et $X = 10$ ou plus généralement la distance des divisions $X = 10^k$ et $X = 10^{k+1}$ (fig. 152).

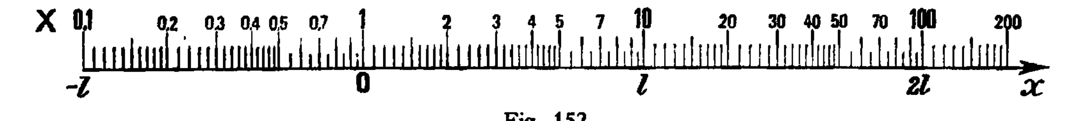


Fig. 152.

***Une échelle logarithmique de module l est un axe gradué sur lequel l'abscisse x de toute graduation* X *est égale à* $l \log X$.**

Les échelles **B** et **b** de la règle à calcul (fig. 157) sont des échelles logarithmiques de module $l = 25$ cm tandis que les échelles logarithmiques $\mathbf{B}^2$ et $\mathbf{b}^2$ ont pour module $\frac{l}{2} = 12{,}5$ cm.

349. Propriétés. — 1° Les divisions X et 10 X ont pour abscisses $l \log X$ et $l + l \log X$. Elles coïncident dans la translation de vecteur $l\,\vec{i}$. Comme on ne peut multiplier à l'infini les divisions (écart minimum : 0,4 mm) il s'ensuit que l'ensemble des divisions $1 \leqslant X \leqslant 10$ se reproduit pour $10 \leqslant X \leqslant 100$, $10^k \leqslant X \leqslant 10^{k+1}$, les graduations étant à chaque fois multipliées par 10.

2° On atteint très rapidement de grandes valeurs de X sur la droite, tandis que sur la gauche les valeurs de X sont d'autant plus écartées qu'elles sont voisines de 0.

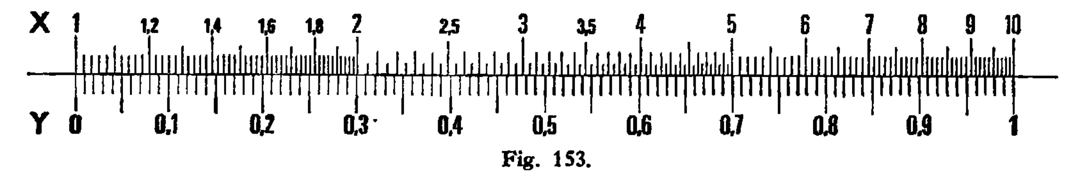


Fig. 153.

3° La juxtaposition de chaque côté d'un même axe d'une échelle logarithmique X et de l'échelle métrique Y associée de même module réalise pour tout point M de l'axe :

$$x = l \log X = lY \Longrightarrow Y = \log X.$$

On obtient ainsi un *abaque linéaire* de la relation $Y = \log X$ qui permet par simple lecture de déterminer l'un des nombres Y ou X connaissant l'autre. Nous verrons que cette disposition est réalisée par les échelles B et L de la règle à calcul (fig. 157).

350. Repères logarithmiques. — Dans un repère cartésien xOy remplaçons chacune des échelles métriques x ou y, par l'échelle logarithmique associée de même module X ou Y.

A tout couple de réels positifs (X, Y) est ainsi associé le point M (X, Y) de coordonnées cartésiennes $x = \log X$ et $y = \log Y$.

Toute relation $F(X, Y) = 0$ entre les coordonnées logarithmiques de M se traduit par une relation $f(x, y) = 0$ entre ses coordonnées métriques x et y. En construisant la courbe (C) d'équation $f(x, y) = 0$, on obtient le *diagramme logarithmique de la relation* $F(X, Y) = 0$. Ayant supprimé toutes les indications relatives au repère initial xOy on peut alors utiliser ce diagramme comme un diagramme cartésien pour, par exemple, déterminer Y connaissant X (fig. 154).

351. Exemples. — 1° Pour $a > 0$, la relation $Y = aX^2 \Longleftrightarrow \log Y = \log a + 2 \log X$ admet pour diagramme la droite $y = 2x + \log a$. Cette droite de coefficient directeur $+ 2$ est définie par le point A $\left(X = \frac{1}{\sqrt{a}}, Y = 1\right)$ et B $(X = 1, Y = a)$.

La droite $Y = X^2$ est issue de l'origine $(X = 1, Y = 1)$ et passe par le point $(X = 10, Y = 100)$. On vérifie que $X = 7 \Longrightarrow Y = 49$, ou que $Y = 225 \Longrightarrow X = 15$ (fig. 154).

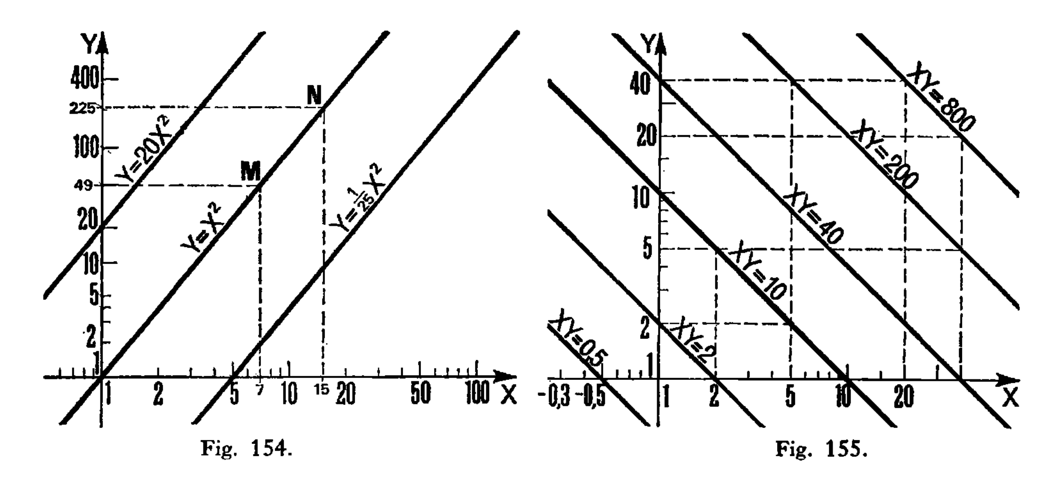


Fig. 154. Fig. 155.

2° Pour $a > 0$ la relation $XY = a \Longleftrightarrow \log X + \log Y = \log a$ admet (fig. 155) pour diagramme la droite : $x + y = \log a$ définie par A $(X = a, Y = 1)$ et B $(X = 1, Y = a)$.

3° Plus généralement, toute relation $X^m Y^n = K \Longleftrightarrow m \log X + n \log Y = \log K$ admet pour diagramme la droite $mx + ny = \log K$, coupant l'échelle X au point $X = K^{1/m}$ et l'échelle Y au point $Y = K^{1/n}$. Si on construit pour m et n donnés les différentes droites parallèles $X^m Y^n = C^{te}$ on obtient un abaque de la relation $X^m Y^n = Z$ qui permet de trouver la valeur de l'une des variables X, Y, ou Z connaissant les deux autres.

352. Repères semi-logarithmiques. — Si dans le repère cartésien xOy, on conserve l'échelle métrique $x = X$ et si l'on remplace l'échelle métrique y par l'échelle logarithmique Y associée $y = \log Y$, on obtient un *repère semi-logarithmique*, dans lequel le diagramme de la relation $F(x, y) = 0$ est dit semi-logarithmique.

Ainsi la relation :

$$Y = (1 + r)^X \Longleftrightarrow \log Y = X \log(1 + r)$$

admet pour diagramme la droite $y = x \log (1 + r)$. En construisant les différentes droites pour $r = 0{,}01$; 0,02..... 0,08 on obtient un abaque permettant de trouver, par exemple pour r et $X = n$ donnés, la valeur Y de $(1 + r)^n$ utilisée dans les intérêts composés (fig. 156).

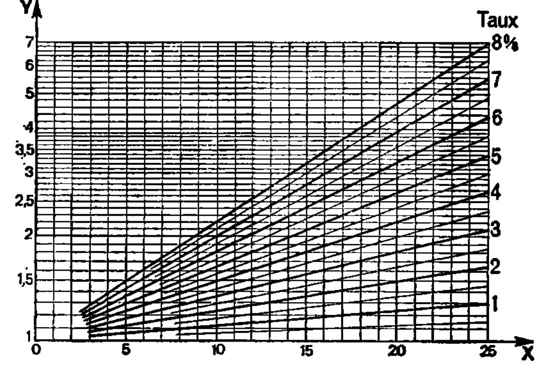


Fig. 156.

353. Règles graduées et papiers quadrillés logarithmiques. — Il est possible de se procurer ou de commander (librairies, maisons d'articles de dessin) des règles analogues à un triple décimètre, mais dont les graduations sont des échelles logarithmiques de modules donnés.

On trouve de même dans le commerce divers modèles de papiers quadrillés logarithmiques ou semi-logarithmiques réalisant une gamme étendue de combinaisons de modules. Leur emploi est conseillé lorsqu'on veut construire un diagramme ou un abaque logarithmique précis (fig. 156).

En collant une bande de 1 cm de large découpée dans un tel papier, sur un support rigide (réglette en bois ou en bristol), il est possible de se fabriquer un jeu de règles graduées logarithmiques à peu de frais.

EXERCICES

— Calculer le capital S constitué en plaçant une somme A à intérêts composés au taux r, pendant n années dans les cas suivants :

1291. A = 12 000 F; $r = 0{,}04$; $n = 15$.

1292. A = 8 400 F; $r = 0{,}035$; $n = 30$.

1293. A = 25 000 F; $r = 0{,}06$; $n = 10$.

1294. A = 22 500 F; $r = 0{,}045$; $n = 16$.

1295. A = 16 000 F; $r = 0{,}05$; $n = 25$.

1296. A = 32 400 F; $r = 0{,}055$; $n = 20$.

1297. Au bout de combien d'années un capital placé à 5 % à intérêts composés se trouve-t-il doublé ? triplé ? quadruplé ?

1298. Quelle somme A faut-il placer à intérêts composés au taux de 5 % pour disposer 15 ans plus tard d'un capital de 16 000 F ?

1299. Déterminer la somme A qu'il faut placer à intérêts composés à 4,5 % pour obtenir dans 18 ans un capital de 75 000 F.

1300. On veut obtenir dans 20 ans un capital de 120 000 F. A quel taux doit-on placer à intérêts composés une somme de 54 000 F pour réaliser ce capital ?

1301. Un épargnant place à intérêts composés à 4 % une somme de 75 000 F en vue de construire un pavillon qui lui reviendra à 125 000 F. Au bout de combien de temps disposera-t-il du capital nécessaire ?

1302. On a placé à 4,5 % à intérêts composés une somme de 24 000 F. Quelle a été la durée du placement sachant que l'on a retiré un capital final de 50 000 F ?

— Une annuité a placée au début de chaque année à intérêts composés au taux r constitue au bout de n années un capital S. Connaissant :

1303. $a = 1\ 000$ F; $r = 0{,}05$ et $n = 20$; calculer S.

1304. S = 120 000 F; $r = 0{,}045$ et $n = 15$; calculer a.

1305. $a = 2\ 500$ F; S = 64 000 F et $n = 25$; calculer r.

1306. $a = 1\ 500$ F; S = 60 000 F et $r = 0{,}06$; calculer n.

1307. $a = 3\ 600$ F; S = 50 000 F et $r = 0{,}05$; calculer n.

1308. En vue de constituer une dot à sa fille le jour de son mariage, un père avait placé le jour de sa naissance et à chacun de ses anniversaires une annuité de 1 200 F à intérêts composés au taux de 4,75 %. La jeune fille s'est mariée à 19 ans 7 mois et 20 jours. De quelle dot disposait-elle ?

1309. Un employé âgé de 32 ans voudrait disposer à sa retraite à 56 ans d'un capital de 200 000 F pour s'acheter un commerce. Quelle annuité doit-il placer à intérêts composés au taux de 5 %, en début de chaque année, pour constituer ce capital ?

1310. Un particulier qui dispose d'un capital de 120 000 F hésite entre deux formes de placements, pendant une durée de 20 ans :

1° Placer son capital à intérêts composés à 4,5 %.

2° Placer son capital à intérêt simple à 6 %, sachant que l'intérêt annuel lui procurera une annuité qu'il pourra à la fin de chaque année replacer à intérêts composés à 4 %.
Quel est le placement le plus avantageux et quel est le capital final constitué ?

— Calculer l'annuité a à verser à la fin de chaque année pour rembourser en n années un emprunt A augmenté de ses intérêts composés au taux r.

1311. A = 20 000 F; $r = 0{,}05$; $n = 5$.

1312. A = 50 000 F; $r = 0{,}06$ et $n = 25$.

1313. A = 72 000 F; $r = 0{,}045$; $n = 12$.

1314. A = 36 000 F; $r = 0{,}04$ et $n = 8$.

1315. On veut rembourser une dette de 30 000 F augmentée de ses intérêts composés à 5 % par des versements annuels de 5 000 F. Calculer le nombre d'années nécessaires pour amortir cette dette et le montant exact de la dernière annuité.

1316. Reprendre le problème précédent pour une dette de 150 000 F à intérêts composés à 6 % et des annuités de 20 000 F.

1317. Une personne emprunte au taux de 4 % et à intérêts composés une somme de 20 000 F qu'elle doit rembourser par dix annuités égales, payables d'année en année, la première étant payée 3 ans après l'emprunt.

1° Déterminer la valeur de ces annuités.

2° L'emprunteur meurt après avoir payé la cinquième annuité et ses héritiers, au lieu de continuer les remboursements par annuités, préfèrent se libérer par un payement unique effectué deux ans après le décès; le prêteur accepte. Déterminer le montant de ce payement.

1318. Un ingénieur prélève sur son traitement une économie de 3 000 F par an qu'il place dans son industrie moyennant un intérêt annuel de 10 %. Au lieu de retirer ses intérêts il les laisse placés Quel est le nombre n des prélèvements auxquels il doit s'astreindre pour s'assurer dans son industrie un revenu annuel d'au moins 3 000 F ?
Dès qu'il a atteint son but, l'ingénieur cesse toute économie sur son traitement et se contente de laisser capitaliser les intérêts à 10 % du capital qu'il s'est constitué. Trente ans après le début de ses économies il se retire. A quel taux x doit-il placer son capital pour avoir un revenu de 10 000 F ?

1319. Construire un jeu de règles graduées logarithmiques sur des bandes de bristol de 30 cm de long et de modules respectifs : 2 cm, 5 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm et 30 cm.

1320. On veut construire un abaque linéaire de la relation $x^2 = y^3$. Montrer qu'il suffit pour cela de juxtaposer le long d'un même segment de 30 cm, deux échelles logarithmiques, la première en x comprenant 3 modules de 10 cm graduée de 1 à 1000, la seconde en y comprenant 2 modules de 15 cm et graduée de 1 à 100. En déduire :

1° $y = \sqrt[3]{x^2}$ pour $x = 8$; 125; 160; 200 et 729.

2° $x = \sqrt{y^3}$ pour $y = 9$; 25; 30; 70 et 87.

1321. Construire un repère logarithmique (X, Y) dont les échelles de modules $l = 5$ cm sont graduées de 0,1 à 100.
Représenter, dans ce repère pour diverses valeurs de a, les fonctions $Y = aX^2$.

1322. Construire un repère semi-logarithmique (X, Y), dans lequel l'échelle métrique X sera graduée en cm, et l'échelle logarithmique Y aura pour module 5 cm.
Représenter dans ce repère la fonction $Y = 2^X$ et la fonction $Y = 2^{-X}$. Quelle particularité géométrique présentent les deux diagrammes ?

1323. Représenter sur du papier quadrillé logarithmique gradué de 0,1 à 100 en x, de 0,1 à 1 000 en y les diagrammes des relations suivantes :

$$x^2 = 4\,y; \qquad 10\,x = y^3; \qquad xy = 100; \qquad x^3y^2 = 6\,400.$$

Déterminer graphiquement les intersections de ces diagrammes. Vérifier par le calcul.

1324. Dans un repère logarithmique dont les échelles x et y sont graduées de 0,1 à 1000, représenter pour différentes valeurs de m le diagramme de $x^2y^3 = m^4$. Montrer que l'ensemble des diagrammes obtenu constitue un abaque de la relation : $x^2y^3 = z^4$, permettant de déterminer l'une des variables x, y ou z connaissant les deux autres.

1325. Construire dans un repère logarithmique pour m entier relatif les courbes $\dfrac{y}{5} = \left(\dfrac{x}{4}\right)^m\cdot$

En déduire un abaque de la relation $\dfrac{y}{5} = \left(\dfrac{x}{4}\right)^z\cdot$

Généraliser pour obtenir un abaque de la relation $\dfrac{y}{b} = \left(\dfrac{x}{a}\right)^z\cdot$

1326. Les nombres α et $a > 0$ étant donnés, représenter dans un repère semi-logarithmique (métrique en x, logarithmique en y) pour les valeurs entières de m les courbes $y = m\,a^{(x-\alpha)}$ et obtenir un abaque de la relation $y = za^{(x-\alpha)}$.

1327. Construire dans un repère métrique en x, logarithmique en y, l'abaque de la relation $y = z^x$. Déterminer z pour $x = 3{,}5$; $y = 12$, puis y pour $x = \pi$ et $z = 3$ et enfin x pour $y = 23$ et $z = 2{,}4$.

1328. On dispose d'une feuille de papier quadrillé semi-logarithmique graduée en mm en largeur et suivant une échelle logarithmique de module 15 cm ou 20 cm en hauteur.

En utilisant les valeurs de log $(1 + r)$ pour $r = 0{,}1$; 0,2 ... 0,10, établir un abaque de la relation $y = (1 + r)^x$ pour $x \in [0{,}30]$ en prenant 6 mm pour unité pour l'échelle métrique en x.

Utiliser cet abaque pour résoudre les exercices n°s 1291 à 1302.

RÈGLE A CALCUL

354. Description. — La règle à calcul remplace la table de logarithmes lorsqu'on veut effectuer rapidement des calculs numériques. Elle se compose d'une *réglette* pouvant coulisser à l'intérieur d'une *règle* et d'un *curseur* mobile portant un ou trois traits de repérage (fig. 157). Chaque bord de la règle et le bord en regard de la réglette portent des échelles logarithmiques égales.

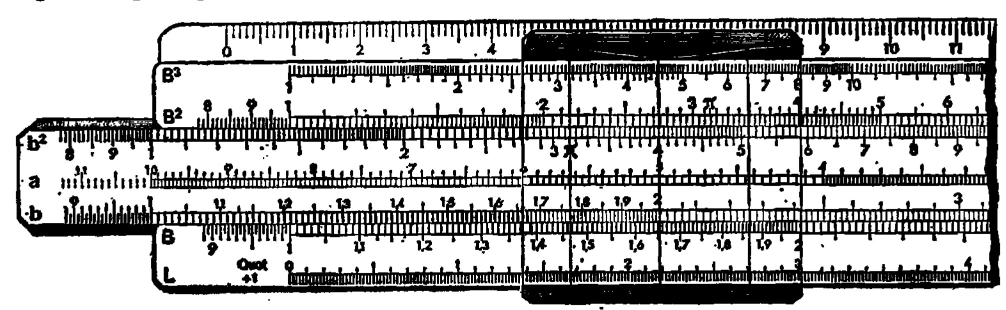


Fig. 157.

1° Échelles inférieures **B** et **b**. — L'échelle inférieure **B** de la règle et l'échelle inférieure **b** de la réglette sont des échelles logarithmiques de même module ($l = 25$ cm) graduées de 1 à 10.

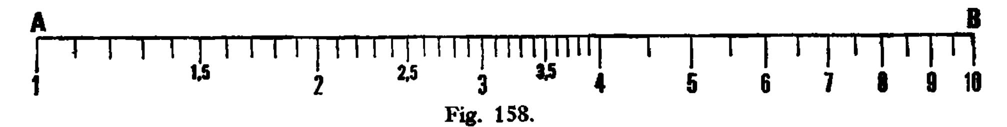


Fig. 158.

2° Échelles supérieures **B²** et **b²**. — Ces deux échelles sont identiques.

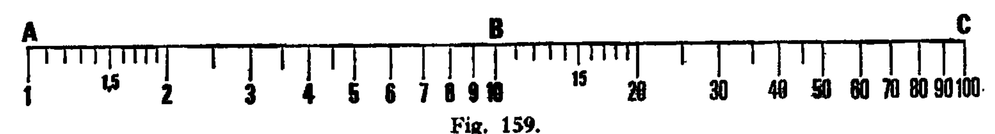


Fig. 159.

Chacune d'elles comprend deux échelles logarithmiques AB et BC (fig. 159) de module $\frac{l}{2}$, égal à la *moitié* de celui des échelles inférieures.

Les chiffres 2, 3, 4, ... de l'échelle BC représentent les nombres 20, 30, 40, ...
En effet soit M le point de cote 3 sur l'échelle BC :

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \frac{l}{2}\log 10 + \frac{l}{2}\log 3 = \frac{l}{2}\log 30.$$

Donc la cote de M est 30. On lit donc sur BC les nombres de 10 à 100.

Sur certaines règles (fig. 157) l'échelle BC est effectivement graduée de 10 à 100, ce que nous supposerons dans la suite.

L'échelle $\mathbf{B}^3$ est formée de 3 échelles logarithmiques identiques de module $\frac{l}{3}$, de longueur totale l. Comme précédemment on montrerait que l'ensemble des trois échelles constitue une échelle unique graduée de 1 à 1 000.

L'échelle des inverses **a** située au milieu de la réglette est identique à *l'échelle* **b** mais de sens contraire.

L'échelle des logarithmes **L** est une échelle métrique placée sur le bord inférieur de la règle.

Enfin au dos de la réglette on trouve les échelles S et T séparées par l'échelle S & T relatives aux fonctions circulaires sinus et tangente.

355. Remarque. — On utilise de préférence les échelles B et b qui donnent plus de précision que les échelles supérieures $\mathbf{B}^2$ et $\mathbf{b}^2$. On s'entraînera à effectuer rapidement les opérations suivantes :

1° *Lire une graduation de la règle ou de la réglette repérée au curseur.*

2° *Amener une graduation donnée de la réglette en coïncidence avec une graduation de la règle repérée au curseur.*

Signalons qu'il existe des règles à calcul de poche ($l = 12$ ou 15 cm) et aussi des règles à calcul de bureau ($l = 50$ cm) dont la précision est supérieure à celle de la règle ordinaire.

356. Produit de deux nombres. — On opère avec les échelles inférieures B et b.

Exemple I. — $1{,}9 \times 4$.

Amenons la division 1 de la réglette b sur la division 1,9 de la règle B (fig. 160); en regard de la graduation 4 de la réglette nous lisons sur B le produit 7,6 de 1,9 par 4 car en prenanr le module des échelles pour unité de longueur :

$$\overline{OA} = \log 1{,}9; \quad \overline{AB} = \log 4 \quad \text{et} \quad \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \log 1{,}9 + \log 4 = \log 7{,}6.$$

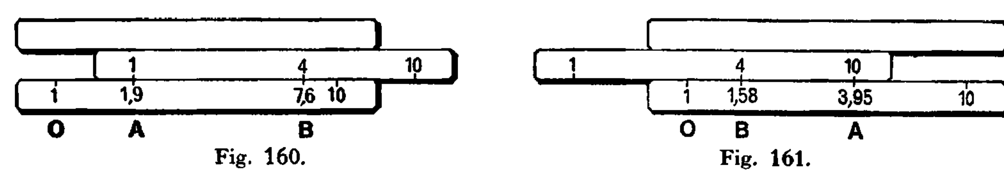


Fig. 160. Fig. 161.

Exemple II. — $3{,}95 \times 4$.

En opérant comme ci-dessus la division 4 sort de la règle. Amenons la division 10 de la réglette sur la graduation 3,95 de la règle B.

En regard de la division 4 de la réglette nous lisons sur B : $1{,}58 = \frac{3{,}95 \times 4}{10}$ car (fig. 161) :

$$\overline{OA} = \log 3{,}95; \quad \overline{BA} = \log 10 - \log 4 \quad \text{et :}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} - \overline{BA} = \log 3{,}95 - \log 10 + \log 4 = \log \frac{3{,}95 \times 4}{10}.$$

Des deux exemples précédents il résulte que :

Si les nombres a et b sont compris entre 1 *et* 10, *on amène la graduation* 1 *de la réglette sur la graduation a de la règle. En regard de la division b de la réglette on lit sur la règle le produit ab.*

Si la division b de la réglette sort de la règle, on amène la graduation 10 *de la réglette sur la division a de la règle; en regard de la graduation b de la réglette on lit sur la règle le produit* $\frac{ab}{10}$.

Exemple III. — Les deux facteurs ne sont pas compris entre 1 et 10.

Soit à calculer : $27{,}5 \times 31 = 2{,}75 \times 3{,}1 \times 100$.

La règle donne $2{,}75 \times 3{,}1 = 8{,}52$. Donc le produit cherché est égal à 852. On dit mentalement : le produit est compris entre $20 \times 30 = 600$ et $30 \times 40 = 1\,200$, ce qui permet de placer la virgule.

357. Produit de plusieurs nombres. — Supposons les virgules déplacées pour que les nombres donnés soient inférieurs à 10. On calcule d'abord $ab = m$ que l'on repère à l'aide du curseur sur l'échelle inférieure **B** de la règle. On calcule ensuite le produit $mc = abc$ comme ci-dessus. La place de la virgule se détermine ensuite mentalement.

358. Quotient de deux nombres. — On opère avec les échelles inférieures **B** et **b**.

EXEMPLE I. — 7,8 : 3.

Amenons la division 3 de la réglette sur la division 7,8 de la règle. En regard de la division 1 de la réglette on lit sur la règle le quotient $2,6 = \frac{7,8}{3}$ car (fig. 162) :

$$\overline{OB} = \overline{OA} - \overline{BA} \quad \text{et} \quad \overline{OA} = \log 7,8; \quad \overline{BA} = \log 3.$$

Donc : $$\overline{OB} = \log 7,8 - \log 3 = \log \frac{7,8}{3}.$$

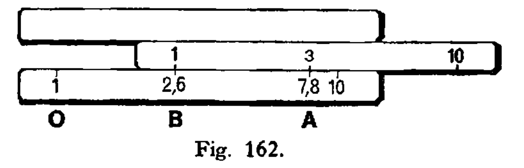


Fig. 162.

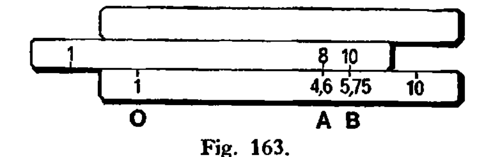


Fig. 163.

EXEMPLE II. — 4,6 : 8.

Amenons la division 8 de la réglette sur la division 4,6 de la règle. En regard de la division 10 de la réglette nous lisons sur la règle le quotient :

$$5,75 = \frac{10 \times 4,6}{8} \text{ car (fig. 163) :}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \quad \text{et} \quad \overline{OA} = \log 4,6; \quad \overline{AB} = \log 10 - \log 8.$$

Donc : $$\overline{OB} = \log 4,6 + \log 10 - \log 8 = \log \frac{4,6 \times 10}{8}.$$

Des deux exemples précédents il résulte que :

Si a et b sont compris entre 1 *et* 10, *on amène la division b de la réglette sur la division a de la règle. En regard de la division* 1 *de la réglette on lit, sur la règle, le quotient cherché. Si la division* 1 *de la réglette sort de la règle, on lit $\frac{10a}{b}$ en regard de la division* 10 *de la réglette.*

REMARQUE. — Si a et b ne sont pas tous deux compris entre 1 et 10 on déplace les virgules pour se ramener au cas précédent. La virgule du quotient se place ensuite mentalement.

EXEMPLE : $$\frac{460}{80} = \frac{4,6}{8} \times 10 = 5,75.$$

359. Règle de trois simple. — Nous utiliserons les échelles supérieures B^2 et b^2 supposées graduées de 1 à 100. Les trois nombres a, b et c étant compris entre 1 et 10 il s'agit de calculer :

$$x = \frac{b \times c}{a}.$$

Il suffit d'un seul déplacement de la réglette :

On amène la division a de la réglette sur la division b de la règle. En regard de la division c de la réglette on lit, sur la règle, le nombre x cherché ou en regard de la division 10*c de la réglette on lit sur la règle le nombre* 10*x*.

1° Désignons par y le nombre de la règle qui se trouve en regard du nombre c de la réglette (fig. 164). L'égalité $\overline{BR} = \overline{AC}$ donne :

$$\log y - \log b = \log c - \log a$$

soit : $$\frac{y}{b} = \frac{c}{a} \quad \text{donc} \quad y = \frac{bc}{a} = x.$$

2° Désignons par y le nombre de la règle qui se trouve en regard du nombre $10c$ de la réglette (fig. 165). L'égalité $\overline{BS} = \overline{AD}$ donne :

$$\log y - \log b = \log 10c - \log a.$$

Soit : $$\frac{y}{b} = \frac{10c}{a} \quad \text{donc} \quad y = \frac{10bc}{a} = 10x.$$

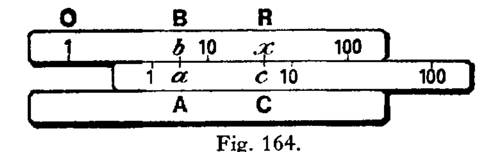


Fig. 164.

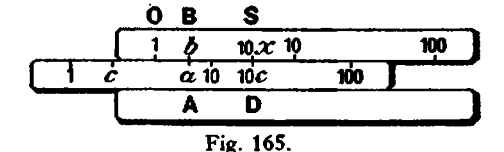


Fig. 165.

REMARQUES. — 1° Si a, b et c ne sont pas compris entre 1 et 10 un déplacement de virgules nous ramène au cas précédent. La virgule définitive du résultat s'obtient mentalement.

2° On peut opérer de même avec les échelles inférieures lorsque x est lui-même compris entre 1 et 10, cas auquel on peut facilement se ramener :

Pour $$x = \frac{6 \times 7{,}9}{3{,}2} = \frac{12 \times 7{,}9}{6{,}4} \quad \text{on calculera} \quad \frac{1{,}2 \times 7{,}9}{6{,}4} = 1{,}48 = \frac{x}{10}.$$

Pour $$y = \frac{2{,}3 \times 2{,}8}{8{,}5} = \frac{4{,}6 \times 2{,}8}{17} \quad \text{on calculera} \quad \frac{4{,}6 \times 2{,}8}{1{,}7} = 7{,}58 = 10y.$$

360. Règle de trois composée. — Pour calculer $x = \frac{abcd}{fgh}$ on calcule comme ci-dessus : $y = \frac{ab}{f}$ que l'on repère sur la règle à l'aide du curseur,

puis : $$z = \frac{yc}{g} \quad \text{et} \quad x = \frac{zd}{h}.$$

En opérant à l'aide des échelles supérieures l'opération se fait par trois déplacements de la réglette en multipliant par 10, si besoin est, le facteur utilisé du dividende ou celui du diviseur :

Pour : $$\frac{7{,}8 \times 9{,}6 \times 8{,}4}{1{,}3 \times 2{,}7} \quad \text{on effectue :} \quad 7{,}8 \times \frac{9{,}6}{1{,}3} \times \frac{8{,}4}{27} = 17{,}9.$$

Pour : $$\frac{1{,}7 \times 1{,}3 \times 2{,}4}{8{,}6 \times 7{,}9} \quad \text{on effectue :} \quad 1{,}7 \times \frac{13}{8{,}6} \times \frac{24}{7{,}9} = 7{,}92.$$

361. Échelle des inverses. — A un nombre x de l'échelle inférieure **b** de la réglette correspond le nombre $\frac{10}{x}$ de l'échelle des inverses **a**.

Cette échelle permet de réaliser par un seul déplacement de la réglette les opérations suivantes sur les échelles inférieures.

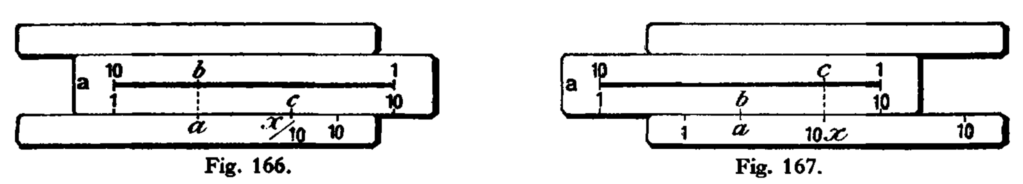


Fig. 166. Fig. 167.

1° $x = a.b.c$ pour $10 < x < 100$. On amène b de l'échelle des inverses sur a de l'échelle inférieure **B** de la règle (fig. 166). En regard de c de l'échelle inférieure **b** de la réglette on lit sur la règle, le nombre $\frac{x}{10}$, car on a ainsi effectué $\frac{ac}{b'}$ avec $b' = \frac{10}{b}$.

2° $x = \frac{a}{b \cdot c}$ pour $0,1 < x < 1$. On amène b de la réglette inférieure sur a de la règle inférieure (fig. 167). En regard de c de l'échelle des inverses on lit, sur la règle, $10x$ car on a ainsi effectué $\frac{ac'}{b}$ avec $c' = \frac{10}{c}$.

362. Carrés et racines carrées. — Si n et N *sont deux divisions correspondant à une même position du curseur sur les échelles* **B** et **B²** *de la règle (ou* **b** *et* **b²** *de la réglette), le nombre* N *est le carré de n.*

Les échelles B et B^2 ont pour modules respectifs en cm : l et $\frac{l}{2}$. Donc l'abscisse commune $\overline{OA}$ de ces deux divisions correspondantes est en cm :

$$\overline{OA} = l \log n = \frac{l}{2} \log N \implies \log N = 2 \log n \iff N = n^2 \text{ ou } n = \sqrt{N}.$$

On lit ainsi : $7,5^2 = 56,25$ et $\sqrt{6} = 2,45$.

Si n n'est pas compris entre 1 et 10 on multiplie ou on divise par une puissance de 10 convenable. Ainsi :

$$(0,075)^2 = \left(\frac{7,5}{10^2}\right)^2 = \frac{56,25}{10^4} = 0,005\,625.$$

Si N n'est pas compris entre 1 et 100, on multiplie ou on divise par une puissance de 100; ainsi :

$$\sqrt{600} = \sqrt{6 \times 10^2} = 10\sqrt{6} = 24,5.$$

REMARQUES. — 1° On obtient n^2 avec plus de précision en effectuant le produit $n \times n$ sur les échelles inférieures B et b.

2° On peut aussi amener n de l'échelle des inverses en regard de n de l'échelle inférieure B. On lit alors sur cette échelle inférieure $n^2 = N$ (pour $1 < N < 10$) en regard du 1 de l'échelle des inverses ou bien $\frac{N}{10}$ (pour $10 < N < 100$) en regard du 10 de l'échelle des inverses.

363. Cubes et racines cubiques. — L'échelle des cubes B^3 graduée de 1 à 1 000 est formée de trois échelles semblables à l'échelle inférieure B mais construites avec un module trois fois plus petit. Le même raisonnement que ci-dessus montre qu'au nombre n de l'échelle inférieure B correspond le nombre N de l'échelle des cubes B^3 tels que :

$$\overline{OA} = l \log n = \frac{l}{3} \log N. \qquad \text{Donc :}$$

$$\log N = 3 \log n \iff N = n^3 \quad \text{et} \quad n = \sqrt[3]{N}.$$

On obtient par une lecture directe l'un des nombres connaissant l'autre.

1° Si la règle ne comporte pas une échelle des cubes ou si on désire plus de précision, on effectue $N = n \times n \times n$ sur les échelles inférieures B, b et a (n° 361).

2° On peut aussi retourner la réglette bout pour bout et amener la division n de l'échelle inférieure b de la réglette sur le nombre n de l'échelle supérieure B^2 de la règle. On lit alors sur cette échelle supérieure B^2 de la règle le nombre $n^3 = N$ (pour $1 < N < 100$) en regard du 1 de la réglette ou $\frac{N}{100}$ (pour $100 < N < 1000$) en regard du 10 de la réglette inférieure (fig. 168 et 169).

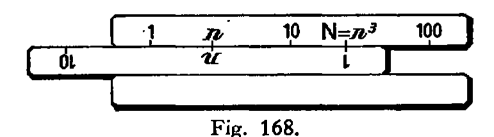


Fig. 168.

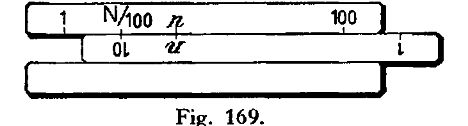


Fig. 169.

Inversement si N (entre 1 et 1 000) est un nombre donné, on peut rétablir cette position de la réglette. En recherchant à l'aide du curseur le nombre n de la réglette inférieure qui coïncide avec son égal de la règle supérieure on obtient $n = \sqrt[3]{N}$.

364. Logarithmes. — Les mantisses des logarithmes décimaux des nombres de 1 à 10 se lisent sur l'échelle métrique L placée le long du bord inférieur de la règle.

A une même position du curseur correspondent les divisions x sur l'échelle inférieure **B** et 10 log x sur l'échelle des logarithmes **L**. On en déduit log x connaissant x ou x connaissant log x.

EXEMPLES.

1° Soit $a = 267$. En regard de 2,67 sur l'échelle inférieure de la règle on lit sur l'échelle des logarithmes : 4,27,

$$\log 2{,}67 = 0{,}427 \quad \text{et} \quad \log 267 = 2{,}427.$$

2° Soit $\log x = \overline{1}{,}635$. En regard de 6,35 sur l'échelle des logarithmes on lit 4,31 sur l'échelle inférieure de la règle. Donc : $x = 0{,}431$.

365. Puissances et racines. — Le nombre a étant donné on peut déterminer log a et par conséquent calculer par une opération simple :

$$\log a^n = n \log a; \qquad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a;$$

$$\log \frac{1}{a^n} = -n \log a; \qquad \log \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = -\frac{1}{n} \log a.$$

D'où on déduit par une simple lecture : a^n, $\sqrt[n]{a}$, $\frac{1}{a^n}$ ou $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

EXEMPLE. — *Calculer le nombre* : $x = \sqrt[7]{(472)^5}$.

On a : $$\log x = \frac{1}{7} \log (472)^5 = \frac{5}{7} \log 472.$$

On détermine à la règle : $\log 472 = 2{,}674$.

Puis on calcule : $$\log x = \frac{2{,}674 \times 5}{7} = \frac{13{,}37}{7} = 1{,}91.$$

D'où à la règle $x = 81{,}3$.

366. Fonctions circulaires.

1re MÉTHODE. — Retirons la réglette de sa coulisse et replaçons-la après l'avoir retournée face pour face, de façon que l'échelle T vienne coïncider exactement avec l'échelle inférieure B de la règle. A une position donnée du curseur correspondent alors :

a) un arc α (de 5° 44′ environ à 90°) de l'échelle S et le nombre 10 sin α de l'échelle inférieure B de la règle.

b) un arc β (de 5° 43′ environ à 45°) de l'échelle T et le nombre 10 tg β de l'échelle inférieure B de la règle.

c) un arc γ (de 34′ à 5° 43′) de l'échelle S & T, et la valeur de 100γ en radians, soit très approximativement 100 sin γ ou 100 tg γ, sur l'échelle inférieure B de la règle.

— Faisons glisser la réglette vers la droite de façon à amener l'un des arcs α, β ou γ précédents en regard de la division 10 de l'échelle inférieure B. On lit alors, sur cette échelle, en regard de l'origine 1 de la réglette :

$$\frac{1}{\sin \alpha}; \quad \frac{1}{\text{tg}\, \alpha} = \text{cotg}\, \alpha = \text{tg}\, (90^\circ - \alpha) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{10\gamma} \ (\gamma \text{ en radians}).$$

2e MÉTHODE. — Sans retourner la réglette, on la fait glisser vers la droite de façon à amener l'un des arcs α, β ou γ en regard du repère du voyant situé à droite sous la règle. En regard de l'extrémité 10 de l'échelle inférieure **B** de la règle, on lit sur l'échelle **b** de la réglette : 10 sin α; 10 tg β ou 100 γ (exprimé en radians).

En regard de l'origine 1 de la réglette on lit sur l'échelle **B** de la règle :

$$\frac{1}{\sin\alpha};\quad \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{cotg}\beta \quad \text{ou} \quad \frac{1}{10\gamma}\ (\gamma \text{ en radians}).$$

On obtient ces mêmes résultats en utilisant le voyant de gauche sous la règle en regard de l'origine de B et de l'extrémité 10 de *b*.

367. Détermination d'un angle. — 1° En opérant dans l'ordre inverse on peut déterminer un angle connaissant son sinus ou sa tangente.

2° On détermine cos α en cherchant sin(90° — α) et tg β pour β compris entre 45° et 90° en cherchant cotg (90° — β).

3° Si α est un petit arc ($\alpha < 15°$), on détermine cos α ou sin (90° — α) d'une manière beaucoup plus précise en calculant le nombre ω mesure de α en radians. On a alors :

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha) = 1 - \frac{\omega^2}{2}.$$

On peut déterminer ω en utilisant l'échelle S & T ou, ayant exprimé l'arc α en α' minutes ou α'' secondes, utiliser les formules :

$$\omega = \frac{\pi\alpha'}{10\,800} = \frac{\pi\alpha''}{648\,000} \Longrightarrow \omega = \frac{\alpha'}{1\,000\,\rho'} = \frac{\alpha''}{100\,000\,\rho''}.$$

Les diviseurs : $\rho' = 3{,}438$ et $\rho'' = 2{,}0628$ sont inscrits sur les échelles inférieures B et *b*.

EXEMPLE. $\alpha = 2°\,50' = 170'$. En amenant ρ' de la réglette inférieure en regard de 1,70 de la règle, on lit sur la règle supérieure en regard de l'extrémité de la réglette $(100\,\omega)^2 = 24{,}4$ (fig. 170).

Donc : $\frac{\omega^2}{2} = 0{,}00122$ et $\cos 2°\,50' = \sin' 87°\,10' = 0{,}99878$.

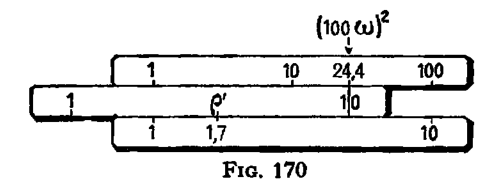


FIG. 170

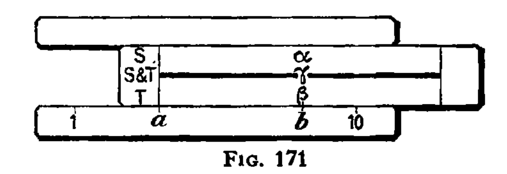


FIG. 171

368. Applications. — La réglette étant retournée face pour face (n° 366, fig. 171):

1° Amenons son origine 1 en regard de la division *a* de l'échelle inférieure B. On lit alors sur cette échelle, en regard des arcs α, β, ou γ des échelles S, T ou S & T les nombres :

$$10\,a\sin\alpha,\qquad 10\,a\operatorname{tg}\beta\qquad \text{et}\qquad 100\,a\sin\gamma \neq 100\,a\operatorname{tg}\gamma.$$

Si les arcs α, β ou γ sortent de la règle, on recule vers la gauche, la réglette de toute sa longueur et on lit cette fois : $a\sin\alpha$, $a\operatorname{tg}\beta$ et $10\,a\sin\gamma$ ou $10\,a\operatorname{tg}\gamma$.

Pour calculer $x = \frac{m}{n}\sin\alpha$, commencer par repérer au curseur $a = \frac{m}{n}$ avant de retourner la réglette.

2° En procédant dans l'ordre inverse on pourra calculer de même $\frac{b}{\sin\alpha}$ ou $b\operatorname{cotg}\beta$ ou encore si *a* et *b* sont des nombres donnés résoudre, par une seule opération, les équations :

$$a\sin x = b \qquad \text{et} \qquad a\operatorname{tg} x = b.$$

EXEMPLES.

1° $23 \sin x = 7{,}8$. En regard du 2,3 de la règle inférieure amenons l'origine de la réglette. En regard de 7,8 on lit alors sur l'échelle S : $x = 19° \, 51'$;

2° $8{,}5 \operatorname{tg} x = 3{,}4$. En regard du 8,5 de la règle amenons l'extrémité de la réglette. En regard de 3,4 on lit alors sur l'échelle T : $x = 21° \, 47'$.

369. Remarque. — Si un arc de g grades vaut α' minutes et ω radians, on obtient :

$$\frac{\alpha'}{5400} = \frac{g}{100} \implies \alpha' = 54g \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{\pi} = \frac{g}{200} \implies \omega = \frac{\pi g}{200} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{g}{10\rho_u}.$$

Si S est l'aire d'un cercle de diamètre d on a : $S = \frac{\pi d^2}{4}$ ou $S = \left(\frac{d}{C}\right)^2$.

Les diviseurs $\rho_u = 6{,}3662$ et $C = 1{,}1284$ figurent, ainsi que π sur les échelles **B** et **b**.

EXERCICES

N. B. *Effectuer à la règle les calculs des exercices* 692 *à* 710, 1263 *à* 1271, 1284 *à* 1290 *et comparer les résultats à ceux que donne la table de logarithmes.*

1329. Calculer le poids d'un cylindre de révolution de 20 mm de diamètre, de 11 cm de hauteur, de densité 8,8.

1330. Trouver la hauteur d'un cône de révolution, dont le rayon de base mesure 17 cm et dont le volume vaut 12 dm³.

1331. Un train parcourt 200 km en 2 h 15 mn. Combien parcourt-il en 1 h 45 mn ?

1332. 17 m d'étoffe valent 8 823 F. Combien valent 13 m de la même étoffe ?

1333. Une équipe de 18 ouvriers a mis 10 jours pour effectuer un travail. Combien de temps aurait mis une équipe de 5 ouvriers ?

— Effectuer à la règle les opérations suivantes (on pourra vérifier les résultats à l'aide de la table de logarithmes) :

1334. $\frac{57 \times 62}{3{,}18}$. $\quad \frac{2{,}32 \times 74}{0{,}655}$. $\quad \frac{7{,}8 \times 2{,}56}{168}$.

1335. $\frac{0{,}83 \times 1{,}72}{5{,}63}$. $\quad \frac{17{,}8 \times 15{,}6}{2{,}64}$. $\quad \frac{2{,}34 \times 3{,}58}{8{,}6}$.

1336. $\frac{7{,}6 \times 2.35}{0{,}347}$. $\quad \frac{5{,}5 \times 21{,}7}{3{,}42}$. $\quad \frac{9{,}3 \times 342}{57{,}5}$.

1337. $\frac{8{,}4 \times 9{,}2 \times 1{,}18}{134 \times 243}$. $\quad \frac{87 \times 216 \times 138 \times 43{,}6}{234 \times 426 \times 91}$.

1338. $\frac{172 \times 25{,}4 \times 9{,}5}{241 \times 163}$. $\quad \frac{93 \times 159 \times 346 \times 2{,}75}{142 \times 425 \times 640}$.

1339. $5{,}7 \times 3{,}86 \times 0{,}47$. $\quad 4{,}65 \times 4{,}78 \times 5{,}34$.

1340. $2{,}42 \times 3{,}56 \times 0{,}94$. $\quad 3{,}84 \times 5{,}08 \times 2{,}77$.

1341. $\frac{0{,}234}{0{,}318 \times 0{,}464}$. $\quad \frac{5{,}48 \times 4{,}28}{1{,}45 \times 2{,}64 \times 3{,}47}$.

1342. $\frac{0{,}384}{0{,}532 \times 0{,}645}$. $\quad \frac{9{,}6 \times 3{,}24}{0{,}382 \times 15{,}7 \times 2{,}89}$.

— Calculer les expressions suivantes :

1343. $\sqrt{642}$. $\quad \sqrt{0{,}474}$. $\quad \sqrt{3{,}142}$.

1344. $\sqrt[3]{8{,}650}$. $\quad \sqrt{0{,}0646}$. $\quad \sqrt[3]{0{,}675}$.

1345. $(1{,}17)^9$. $\quad (2{,}43)^7$. $\quad (2716)^5$.

1346. $\frac{1}{(1,52)^7}$.	$\frac{1}{(1,87)^5}$.	$\frac{1}{(2,71)^6}$.
1347. $\sqrt[7]{186}$.	$\sqrt{840}$.	$\sqrt[10]{1\,740}$.
1348. $\sqrt[7]{(23,7)^5}$.	$\sqrt[3]{(1,78)^7}$.	$\sqrt[5]{(53,4)^9}$.

— Déterminer les rapports trigonométriques (sinus, cosinus, tangentes) des arcs suivants ainsi que leurs inverses et leurs carrés.

1349. 9° 37′	17° 45′.	36° 30′.
1350. 52° 40′.	67° 26′.	87° 24′.
1351. 4,36 grades.	37,45 gr.	93,52 gr.

— Effectuer les opérations suivantes :

1352. $(\sin 33^\circ 15')^2$.	$(\text{tg } 42^\circ 10')^3$.	$\sqrt[5]{\sin 32^\circ 40'}$.
1353. $\sin 33^\circ \times \cos 19^\circ$.	$\frac{\sin 58^\circ 40'}{\text{tg } 17^\circ 25'}$.	$\frac{\sqrt{\sin 37^\circ}}{\sqrt{\text{tg } 28^\circ}}$.
1354. $\frac{132 \sin 24^\circ 30'}{58,7 \cos 35^\circ 30}$.	$\frac{5,7 \text{ tg } 19^\circ 52'}{2,34 \cos 28^\circ}$.	$\frac{21,5 \text{ tg } 3^\circ 42'}{6,8 \sin 4^\circ 23'}$.

— Déterminer l'arc x en degrés, puis en radians, tel que :

1355. $\sin x = 0,375$.	$\text{tg } x = 0,68$.	$\text{tg } x = 3,47$.
1356. $\cos x = 0,0472$.	$\text{cotg } x = 0,057$.	$\text{tg } x = 25,3$.
1357. $\sin x = \frac{17,3}{28,4}$.	$\text{tg } x = \frac{6,8}{2,38}$.	$\cos x = \frac{2,83}{4,55}$.
1358. $\cos x = \frac{3,4 \sin 58^\circ}{4,35}$.	$\text{cotg } x = \frac{4,7}{2 \sin 8^\circ}$.	$\text{tg } x = \frac{3,4 \sin 42^\circ}{2,73}$.

PROBLÈMES DE RÉVISION

1359. Soit l'équation : $mx^3 + (m - 3)x^2 - mx + 2 = 0$.

1° Calculer m pour que cette équation admette le nombre -1 comme solution.

2° Montrer que, dans ces conditions, le premier membre de l'équation donnée peut se mettre sous la forme : $(x + 1)(ax^2 + bx + c)$: a, b, c, étant 3 nombres à calculer.

3° Dans les mêmes conditions, résoudre l'équation donnée.

1360. 1° Construire sur le même graphique les courbes représentant les fonctions $y_1 = -x^2 + 1$ et $y_2 = x^2 + 2x - 3$.

2° Calculer les coordonnées de leurs points d'intersection A et B.

3° Montrer que, quel que soit m, ces points A et B appartiennent à la courbe représentative de la fonction : $y = [(m - 1)x^2 + 2mx - 3m + 1]\dfrac{1}{m + 1}\cdot$

Cette courbe rencontre Ox en deux points dont l'un est fixe quand m varie, et dont l'autre a une abscisse que l'on exprimera en fonction de m. Pour quelle valeur de m ces deux points sont-ils confondus, et que peut-on dire alors de la droite Ox ?

1361. On considère l'expression : $F(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1}\cdot$

1° Construire dans un repère orthonormé xOy la courbe $y = F(x)$.

2° Pour quelles valeurs de x a-t-on $F(x) > -4$?

3° Si deux valeurs distinctes α et β sont telles que $F(\alpha) = F(\beta)$, montrez que ces valeurs sont racines d'une même équation de la forme : $x^2 - px + p - 7 = 0$.

Étudier suivant les valeurs de p l'existence et le signe des racines réelles de cette équation.

1362. Étant donné l'équation : $ax^2 - 2(a + 1)x + a + 2 = 0$.

1° Pour quelles valeurs de a l'équation a-t-elle des racines ? Calculer ces racines.

2° Étudier la variation de la somme S et du produit P des racines de l'équation donnée. Tracer les courbes représentant les variations de S et de P. Montrer comment on pourrait déduire ces deux courbes l'une de l'autre.

3° On considère le trinôme : $y = ax^2 - 2(a + 1)x + a + 2$.

Pour une valeur déterminée de a, la variation de y est représentée par une certaine courbe C.

a) Quelle est la forme de cette courbe ?

b) Les courbes C coupent-elles toujours Ox ? Montrer qu'elles passent toutes par un point fixe et qu'elles admettent la même tangente en ce point.

c) Tracer sur le même graphique les courbes C′ et C″ correspondant respectivement aux valeurs $a = -2$, $a = 1$.

1363. 1° On considère l'expression : $x^2(x - m) + 19x - 7x^2 - 12m$.

Trouver la valeur qu'il faut donner à m pour que l'expression s'annule lorsqu'on y remplace x par 1. Le paramètre m ayant la valeur ainsi obtenue, montrer qu'on peut mettre $x - 1$ en facteur dans l'expression précédente; en déduire les trois valeurs de x qui annulent cette expression.

2° On marque, sur un axe orienté $x'Ox$, les trois points A, B, C ayant pour abscisses respectives les trois valeurs de x obtenues au numéro précédent se suivant dans l'ordre croissant. On trace le cercle Γ de centre B et de rayon BC, et on lui mène du point A les deux tangentes AM et AN (M et N étant les points de contact). Montrer que le quadrilatère AMCN est un losange et donner les valeurs de ses angles.

1364. Soit (H) la courbe représentative de la fonction : $y = \frac{1 + x}{1 - x}$.

1° Construire la courbe (H). Calculer la pente m de la droite qui joint deux points A et B situés sur (H) et dont les abscisses a et b sont données.

Interpréter et contrôler au moyen de la dérivée de la fonction y le résultat obtenu en faisant $a = b = -1$ dans l'expression de m.

2° On suppose que B est déduit de A par la construction suivante (T) : la parallèle à Ox menée par A coupant en K la droite $y = x$, le point B est obtenu par l'intersection avec (H) de la parallèle à Oy menée par K. Calculer b en fonction de a.

Soit C le point déduit de B par la construction (T); calculer son abscisse c en fonction de a.

Soit enfin D le point d'abscisse d déduit de C par la construction (T). Quelle particularité remarquable ce point présente-t-il vis-à-vis du point A ?

3° Reprendre l'étude du paragraphe 2° ci-dessus en donnant à a la valeur tg α, α désignant un angle quelconque donné. Quelles sont en fonction de α les valeurs de b, c, d ? Comment peut-on en déduire la particularité que présentent A et D ?

1365. 1° Tracer, par rapport à un système d'axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, la ligne (L) représentative de la fonction $y = x + 1$ et la ligne (C) représentative de la fonction : $y = \frac{4}{x + 1}$. Déterminer les points communs à ces deux lignes.

2° Par un point M de (L) on mène la parallèle MA à $y'y$, coupant (C) en A, et la parallèle MB à $x'x$, coupant (C) en B. Soit P le quatrième sommet du rectangle construit sur MA et MB. Démontrer que le point P appartient à la ligne (L). Lieu géométrique du milieu D de AB quand M parcourt (L).

1366. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \frac{x + 5}{-x + 3}$ et tracer la courbe représentative (H). Construire sur le même graphique la droite (D) d'équation $y = 2x + 3$. La courbe (H) et la droite (D) ont deux points communs A et B. Calculer les coordonnées de A et de B.

2° Par le point de l'axe des y qui a pour ordonnée m on mène la parallèle D(') à (D). Quelle est l'équation de (D') ? A quelles conditions doit satisfaire m pour que (D') et (H) se coupent ?

3° Dans le cas où (D') et (H) ont deux points communs (que l'on désignera par A' et B'), trouver les coordonnées du milieu I et A'B'. Montrer que I se déplace sur une droite fixe (Δ) quand (D') se déplace en restant parallèle à (D). Montrer que (Δ) passe par le centre de symétrie de (H) et qu'aux points où (Δ) coupe (H), la tangente à (H) est parallèle à (D).

1367. On donne l'équation du second degré : $x^2 - 3x + \frac{5}{4} - m = 0$.

1° Entre quelles limites doit varier m pour que cette équation ait deux racines comprises entre 0 et 2 ?

2° Soit (P) la courbe : $y = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$. Tracer cette courbe et retrouver sur le graphique le résultat obtenu à la question précédente.

3° Construire, sur le même graphique, la courbe (H) : $y = \frac{3(3x+5)}{4(x+3)}$. Former l'équation donnant les abscisses des points communs à (P) et (H). Montrer que l'un de ces points, soit A, est sur Oy.

4° Sachant que l'angle de deux courbes, en un point qui leur est commun, est égal à l'angle de leurs tangentes en ce point, montrer que les courbes (P) et (H) se coupent en A sous un angle droit.

5° Les tangentes en A aux courbes (P) et (H) rencontrent l'axe $x'x$ en M et N. Évaluer la longueur MN.

1368. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \frac{2x}{x-3}$ et tracer la courbe représentative (C).

2° Soient A et B deux points de cette courbe tels que les droites OA et OB aient pour pentes respectives α et β. Calculer les coordonnées des points A et B et former l'équation du premier degré en x et y qui représente la droite AB.

3° Quelle relation existe-t-il entre α et β lorsque l'angle AOB est droit ?

Montrer que, si un angle droit AOB pivote autour du point O, la droite AB qui joint les points où ses côtés coupent la courbe (C) se déplace parallèlement à elle-même.

1369. On considère la fonction de x : $y = -x^2 + 2(m+1)x + m - 5$.

1° Étudier les variations de cette fonction. Construire sur un même graphique les courbes représentatives (C_0) et (C_2) correspondant aux valeurs $m = 0$ et $m = 2$ du paramètre.

2° Montrer que, lorsque m varie, les courbes représentatives (C_m) des fonctions y passent par un point fixe, I.

3° *a*) Pour quelles valeurs de m la courbe (C_m) a-t-elle un seul point commun avec l'axe $x'Ox$? On trouve deux valeurs de m, à chacune desquelles correspond un point commun. Soient A et B les deux points ainsi obtenus. Quelles sont les abscisses de A et B ?

b) Pour quelles valeurs de m la courbe (C_m) coupe-t-elle l'axe $x'Ox$ en deux points, M' et M'' ?

4° Montrer que, lorsque m varie, les points M' et M'' vérifient la relation :

$$\overline{AM'} \cdot \overline{BM''} + \overline{AM''} \cdot \overline{BM'} = 0.$$

1370. On considère un quart de cercle limité aux deux rayons perpendiculaires OA et OB. La tangente en un point quelconque M de ce quart de cercle rencontre respectivement en C et D le prolongement des rayons OA et OB. Le point M se projette sur OA en H. Soient R le rayon du quart de cercle, x la longueur OH.

1° Calculer, en fonction de R et de x, les longueurs MH, OC, HC et OD.

2° Déterminer x de façon que OD = 2 MH. Quelle est alors la valeur de l'angle AOM ?

3° Étudier les variations de OC en fonction de x. Courbe représentative. Déterminer x pour que OC soit égal à 2 R. Quelle est alors la valeur de l'angle AOM ?

1371. On donne dans un plan P un demi-hexagone régulier ABCD ($AB = BC = CD = a$). Sur la perpendiculaire en A au plan P on porte $AS = 2a$.

1° Démontrer que les cinq points S, A, B, C, D, sont sur une même sphère. Le plan P partage cette sphère en deux calottes dont on demande le rapport des rayons polaires.

2° M étant un point variable du segment AS, on pose $SM = x$. Étudier, quand M se déplace entre S et A, la variation en fonction de x, de $y = \overline{MS}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2$.

Pour la courbe représentative on fera $a = 1$ et l'on déterminera la position des tangentes à cette courbe aux points d'abscisses $x = 0$, $x = 2a$.

3° Par le point E de rencontre des droites AB et CD, on mène la parallèle EZ à AD. Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur EZ. Évaluer la distance SH ainsi que le cosinus et le sinus de l'angle des deux droites SE et AD. On mène par SE le plan Q parallèle à AD. Déterminer l'intersection des plans Q et ASC.

1372. On considère un repère orthonormé xOy et un point B dont les projections orthogonales sur les axes sont A sur Ox, C sur Oy. On suppose $OC = 1$, OA positif, et l'on pose $OA = x$.

1° *a*) Placer, dans l'intérieur du rectangle OABC, un point M également distant de Ox et de Oy, et tel que sa distance à Ox soit le double de sa distance à CB.

b) Ce qui précède n'est possible que si x satisfait à une certaine condition. Quelle est cette condition ? Dans toute la suite du problème, on supposera la condition réalisée.

2° *a*) Calculer, en fonction de x, les distances AM et BM.

b) On considère la quantité $y = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - \overline{AB}^2$. Étudier ses variations en fonction de x et construire la courbe représentative.

c) Pour quelles valeurs de x cette fonction y est-elle positive ? Montrer qu'alors l'angle AMB est aigu, et réciproquement.

d) Retrouver ce dernier résultat en calculant la tangente trigonométrique de l'angle AMB, en considérant celui-ci comme la somme de deux autres angles.

e) D'après la valeur de x, reconnaître si M est situé dans le triangle ACO ou dans le triangle ACB.

1373. 1° On considère l'équation :

$$\text{(E)} \qquad (x + 1)\,y^2 - x^3 y + x^2\,(x - 1) = 0$$

où y est l'inconnue et x un paramètre. Pour quelles valeurs de x cette équation a-t-elle une racine double ? Quelle est, dans chaque cas, la valeur de cette racine double ?

Calculer les racines dans le cas général.

2° Construire les courbes C_1 et C_2 représentatives des variations des fonctions :

$$y_1 = \frac{x}{x+1} \quad \text{et} \quad y_2 = x\,(x - 1).$$

C_1 et C_2 étant rapportées au même système d'axes de coordonnées, quelles sont les coordonnées de leurs points d'intersections ?

3° C_1 et C_2 passent toutes deux par l'origine O des coordonnées. Quelles sont les tangentes en O à C_1 et C_2 ?

4° On désigne par Y la plus petite des racines de l'équation (E). Déduire de l'étude du § 2° le tracé de la courbe représentative des variations de Y.

1374. 1° Construire sur le même graphique la courbe (P_1) représentative des variations de la fonction : $y = x^2 - x + 1$ et la courbe (P_2) représentative de la fonction : $y = 2\,x^2 - 3\,x + 2$.

2° La construction précédente montre que ces deux courbes sont tangentes en un point A dont on calculera les coordonnées.

3° Calculer le coefficient directeur de la tangente commune en A et trouver la fonction dont cette tangente $t't$ représente les variations.

4° Par le point B de l'axe Oy, d'ordonnée b, on mène la parallèle à $t't$. Quelle est l'équation représentée par cette parallèle ? Quelle condition doit vérifier b pour que cette droite coupe (P_1) en deux points distincts ? pour qu'elle coupe (P_2) ? Équations donnant les abscisses des points communs.

5° Montrer que les segments découpés par (P_1) et (P_2) sur la parallèle à $t't$ ont même milieu M. Quel est le lieu du point M quand B varie sur Oy ?

1375. 1° Calculer l'angle aigu dont la tangente égale le cosinus.

2° Un point M se déplace sur un arc de circonférence AB qui est le quart d'une circonférence. Le rayon est désigné par R, le centre par O, l'angle AOM par $2\,\alpha$, la projection de M sur le diamètre OB perpendiculaire à OA par H.

On demande de déterminer α par la condition $AM - HM = R$.

3° Quelle est la valeur de α quand la corde AM est tangente au cercle de diamètre OH ? Calculer OH dans cette hypothèse.

Quelle est la valeur de α quand la droite OB est tangente au cercle de diamètre AM ?

4° Étudier les variations de la fonction $y = AM + HM$, en prenant $x = \sin \alpha$ comme variable indépendante. Construire la courbe représentant ces variations.

1376. On considère les deux fonctions :

$$y = x^2 + 3x + 1 \qquad \text{et} \qquad y = x^2 + px + q$$

dont les graphiques représentatifs par rapport à deux axes perpendiculaires Ox et Oy sont respectivement les deux courbes (Γ) et (Γ').

1° Calculer p et q pour que ces deux courbes se coupent en un point A situé sur Oy et qu'en ce point la tangente à la courbe (Γ') ait pour coefficient directeur -2.

Dans toute cette seconde partie, p *et* q *conserveront ces valeurs.*

2° Construire alors sur un même graphique les courbes (Γ) et (Γ'). Établir les équations des droites tangentes à (Γ) et à (Γ') au point A. Ces droites coupent l'axe Ox en B et C. Calculer les abscisses de ces deux points. Calculer tg α, α étant l'angle *aigu* formé par les deux droites tangentes.

1377. 1° Construire en orthonormées la courbe C représentant graphiquement les variations de la fonction : $y = x^2 - 1$.

2° On considère la droite d'équation : $y = 2x \operatorname{cotg} \varphi$, φ désignant un angle donné. Montrer que, quel que soit φ, cette droite rencontre la courbe C en deux points M_1, M_2 et calculer les coordonnées de ces deux points en fonction de $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$.

3° Désignant par A le point de la courbe C situé sur Oy, montrer que, quel que soit φ, les droites AM_1, AM_2 sont perpendiculaires.

4° Quel est le lieu du milieu I du segment M_1M_2 lorsque φ varie ?

1378. 1° Le plan étant rapporté à deux axes rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$, construire la courbe (H) représentant les variations de la fonction : $y = \frac{2(x-1)}{x-2}$.

2° On coupe la courbe (H) par une droite (D) variable, $y = x \operatorname{tg} \varphi$. Exprimer en fonction de $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ les coordonnées des points M et N d'intersection. Expliquer pourquoi les coordonnées de l'un de ces points se déduisent de celles de l'autre lorsqu'on change t en $-\frac{1}{t}$.

3° Montrer que les tangentes en M et N à la courbe (H) ont pour équations :

$$2x + (1+t)^2 y = 2(1+t^2)$$

et

$$2t^2x + (1-t)^2 y = 2(1+t^2).$$

Montrer que les coordonnées X et Y du point d'intersection S de ces tangentes satisfont aux relations : $X + Y = 2$ et $X + Y \operatorname{tg} \varphi = 0$. En déduire le lieu du point S lorsque φ varie et l'angle de OS avec la droite (D).

1379. Sur un quart de circonférence AB de rayon R et de centre O, on considère un point variable M dont la position est définie par l'angle $AOM = \theta$.

1° Calculer en fonction de R et de θ l'aire S du rectangle OPMQ, P et Q étant les projections de M sur OA et OB.

2° Exprimer S en fonction de R et d'une seule ligne trigonométrique de l'angle 2θ, puis en fonction de R et de tg θ.

3° Écrire une équation déterminant θ de manière que S soit l'aire d'un carré de côté l. En déduire que l ne peut pas dépasser $\frac{R}{\sqrt{2}}$ et qu'alors l'équation détermine deux positions du point M. Comment sont situées ces deux positions sur l'arc AB ?

4° On suppose que $l = \frac{R}{2}$. Calculer les valeurs de θ et construire avec la règle et le compas les points M correspondants.

1380. On considère la fonction : $y = x^2 + px + q$.

1° Déterminer p et q de façon que le courbe représentative coupe l'axe $y'y$ au point d'ordonnée 1 et soit tangente à la droite : $y = -3$. On trouvera deux solutions, donc deux courbes.

2° Construire les courbes trouvées dans la première partie et calculer les coefficients directeurs des tangentes à ces courbes au point où elles se coupent.

3° Revenant au cas général, on suppose que l'équation (E) : $x^2 + px + q = 0$ admet deux racines et on les désigne par tg a et tg b. Trouver la relation qui doit exister entre p et q pour que l'on ait : $a + b = \frac{\pi}{3}$.

4° Calculer p et q lorsque, en outre de la condition ci-dessus, l'équation (E) vérifie celle d'avoir une racine égale à $+1$. Déduire de ce calcul la valeur de $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$.

1381. On donne un demi-cercle de diamètre AB $= 2$ R et de centre O. Un point M de ce demi-cercle est projeté orthogonalement en H sur AB. Le problème consiste à déterminer le point M (ou les points M) tels que : MA $+ 2$ MB $= k$R, k étant un nombre positif donné.

1° En prenant pour inconnue $\overline{OH} = x$, on montrera que la résolution du problème conduit à une équation irrationnelle, qu'on discutera.

2° En prenant pour inconnues MA $= u$ et MB $= v$, on formera un système de deux équations, que l'on discutera. Interpréter géométriquement la solution de ce système.

3° En prenant pour inconnue l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, résoudre et discuter le problème.

1382. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \sin x + \frac{1}{8} \operatorname{tg} x = f(x)$.

Tracer la courbe représentative de la fonction dans l'intervalle $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Calculer les valeurs x_1, y_1 correspondant au point M où la fonction atteint un maximum relatif pour : $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

2° Montrer que l'on a : $y = 2 \operatorname{tg} x \cos \frac{x + a}{2} \cos \frac{x - a}{2}$ avec $\cos a = \frac{1}{8}$.

Calculer y pour les valeurs $x = \frac{p\pi}{12}$, p prenant successivement les valeurs 0, 1, ... 11, 12.

3° La droite $y = y_1$ coupe la courbe d'équation $y = f(x)$ en deux points d'abscisses $x = b$, $x = c$ situés dans l'intervalle $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ et différents de M. Former l'équation du 2e degré qui admet pour racines $\cos b$ et $\cos c$. Calculer b et c.

1383. On considère dans un repère orthonormé la droite D d'équation :

$$(1 - m^2)\,x + 2\,my + m^2 - 2\,m - 3 = 0$$

où m désigne un paramètre. Par un point donné du plan passent, en général, deux droites D.

1° Trouver le lieu des points par où passent deux droites D confondues.

2° Trouver le lieu des points par où passent deux droites D perpendiculaires.

1384. Dans un repère orthonormé on donne les points A $(a; 0)$ et B $(-a; 0)$. Soit M un point variable du cercle de diamètre AB tel que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = t$. La droite MB coupe l'axe $y'y$ en I. La parallèle à l'axe $x'x$ issue de I coupe la droite MA en P. Calculer les coordonnées de P en fonction de a et de $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$. Trouver le lieu du point P.

1385. On considère deux cercles C et C′ passant par l'origine O d'un repère orthonormé xOy. Ils sont tangents à la droite d'équation $y = h$, le premier au point P d'abscisse m, le second au point P′ d'abscisse m'. On suppose de plus que $m + m' = 2a$ où a est une constante donnée.

1° Écrire les équations des cercles C et C′ en posant $m = a + t$; $m' = a - t$.

2° Trouver le lieu du second point d'intersection des cercles C et C′.

1386. Dans un repère orthonormé xOy on considère les points fixes A $(a; 0)$, B $(b; 0)$ C $(0; c)$ et le point variable M $(m; 0)$.

1° Former les équations des cercles circonscrits aux triangles MAC et MBC et déterminer les coordonnées des centres ω et ω' de ces cercles.

2° Former l'équation de la droite $\omega\omega'$.

3° Montrer que cette droite reste tangente à la parabole : $x^2 - 2cy + c^2 = 0$.

1387. On considère dans un repère orthonormé xOy le point fixe P (a, b). Soit Q un point variable de $x'x$ d'abscisse m. La perpendiculaire en Q à la droite PQ et la médiatrice de OQ se coupent en M.

1° Calculer les coordonnées du point M.

2° Construire le lieu du point M lorsque m varie.

1388. Dans un repère orthonormé xOy on donne le cercle de centre O, de rayon R et on appelle Δ la tangente à ce cercle au point A (R; O). Soit P un point variable de ce cercle. La tangente en P coupe Δ en M et l'axe $y'y$ en N. On pose $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = t$.

1° Calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle OMN.

2° Construire le lieu du point H lorsque t varie.

1389. On considère dans un repère orthonormé xOy le cercle variable C d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

qui passe par le point fixe A de coordonnées 0 et h.

1° Former l'équation donnant les abscisses des points M et M′ où le cercle C coupe l'axe $x'x$.

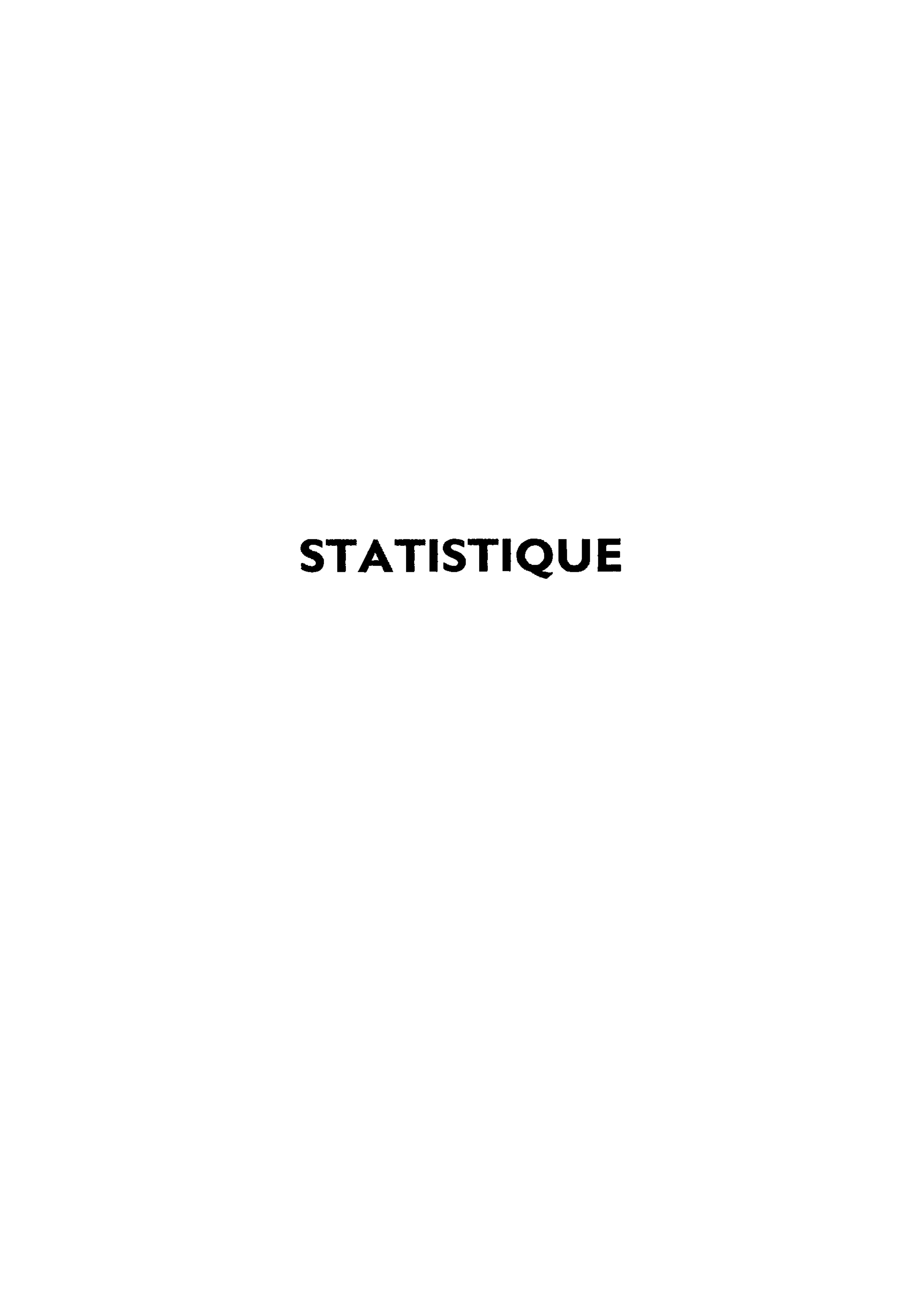
2° Trouver le lieu du centre du cercle C sachant que $OM^2 + OM'^2 = k^2$ nombre donné.

1390. Dans un repère orthonormé xOy on donne le cercle fixe C d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2by - c^2 = 0.$$

1° Déterminer les points où ce cercle coupe l'axe $x'x$.

2° Trouver le lieu d'un point M tel que la tangente MT menée de M au cercle C soit égale à la distance de M à l'axe $x'x$.



STATISTIQUE

STATISTIQUE

Première Leçon

GÉNÉRALITÉS

1. Définition de la statistique. — Le mot « statistique » évoque des ensembles de nombres, groupés en tableaux, traduisant des observations relatives à des faits économiques ou démographiques. Le statisticien s'intéresse, dans une première phase, à l'enregistrement des documents chiffrés et à leur coordination pour « obtenir des rapports numériques sensiblement indépendants des anomalies du hasard et qui dénotent l'existence des causes régulières ».

La statistique est donc la science qui a pour objet l'étude, l'analyse et l'interprétation des observations relatives à un même phénomène.

EXEMPLE. — On peut se proposer d'étudier :

— l'évolution de la population d'un pays de 1936 à 1970;

— la variation de la production de la consommation d'électricité dans une région déterminée, au cours d'une période bien définie;

— la répartition des résidences principales d'après le nombre de pièces et le nombre d'occupants dans la région parisienne.

2. Aperçu historique de la statistique. — On trouve dès l'Antiquité des exemples de *dénombrement* et de *collecte de renseignements :* le recensement de la population guerrière ordonné par l'empereur César. Jusqu'à la Révolution, l'Église entreprend des enquêtes analogues pour collecter des renseignements statistiques. Citons Quetelet (Belge), Galton (Anglais), Charlier (Scandinave), Pearson (Anglais), Neyman (Américain) qui créèrent et développèrent la statistique mathématique.

3. Vocabulaire de la statistique. — ***On appelle population, tout ensemble faisant l'objet d'une étude statistique.***

Les éléments de cette population présentent un trait commun, bien défini, appelé ***caractère.***

On considère par exemple :

— la population des élèves d'une classe ayant obtenu une *moyenne annuelle supérieure à dix* (caractère);

— ou la population des automobiles d'un parc à voitures *immatriculées en France* (caractère).

4. Caractère quantitatif. Caractère qualitatif.

1° *Le caractère d'une population est quantitatif lorsqu'on peut le mesurer.* C'est le cas de l'âge, du poids, de la taille d'individus; de la rémunération mensuelle d'un fonctionnaire; de la consommation d'électricité d'une usine, etc.

Certains d'entre eux ne prennent que des valeurs entières (nombre d'enfants d'une famille, nombre de livrets de la Caisse d'épargne déposés à date fixe). Un tel caractère est dit ***discret*** ou ***discontinu.***

D'autres, au contraire, peuvent prendre des valeurs quelconques dans un intervalle fini ou infini (taille d'un enfant, poids d'un objet). Un tel caractère est dit ***continu.***

2° Le caractère d'une population peut être *qualitatif :* sexe d'une personne, profession, couleur d'une fleur dans une population florale. Un ordre de classement n'est pas imposé, mais on établit une *nomenclature* des catégories; par exemple : la liste des départements pour une étude géographique.

ANALYSE STATISTIQUE

5. Observation des faits. — Les sources d'information nécessaires pour faire l'étude statistique d'une population constituent des éléments de base fondamentaux. On peut obtenir les renseignements concernant *tous* les membres d'une population (recensement du nombre de naissances d'une ville), ou une *partie* de la population (étude de la population active par sexe et âge d'un pays). Dans ce dernier cas, on procède à un ***sondage*** : les unités statistiques ainsi étudiées constituent un ***échantillon.***

De la collecte des observations relatives à un phénomène bien défini, on obtient un ensemble de nombres qui constitue une ***série statistique*** présentée généralement sous forme de *tableaux descriptifs.*

6. Enregistrement des observations. — Supposons qu'on doive définir une statistique portant sur les notes de composition de mathématiques de cent élèves. Les notes figurent dans le tableau ci-dessous et ont été distribuées au fur et à mesure de la correction.

7	6	10	12	14	1	8	9	10	15	14	12	12	13	2	4	6
5	1	9	11	9	6	11	7	4	12	8	13	10	12	12	18	10
9	5	10	6	5	11	12	13	14	8	11	7	15	8	5	13	8
6	11	10	18	12	14	16	6	13	15	11	18	8	19	17	8	15
10	7	11	9	11	9	9	10	13	15	16	9	13	15	17	13	9
9	10	11	7	8	11	16	7	17	10	7	10	10	8	10		

Si certaines caractéristiques apparaissent facilement : peu de notes inférieures à 3 et supérieures à 17, il est difficile de tirer des indications générales de ces données présentées

sans ordre. On commencera donc par les *classer* suivant le tableau qui présente le nombre d'élèves n_i ayant obtenu la note x_i.

Notes x_i	n_i	Notes x_i	n_i	Notes x_i	n_i	Notes x_i	n_i
1	2	6	6	11	10	16	3
2	1	7	7	12	8	17	3
3	0	8	9	13	8	18	3
4	2	9	10	14	4	19	1
5	4	10	13	15	6	20	0

Ce tableau présente l'inconvénient d'être volumineux. On peut effectuer un regroupement des valeurs de la variable (note) suivant 5 *classes*. Pour cela on partage l'intervalle [0,20] en 5 intervalles partiels :

$$[0,4[\quad [4,8[\quad [8,12[\quad [12,16[\quad [16,20].$$

Dans ces conditions, le dépouillement se présente suivant le tableau :

Classes des notes	Nombre d'élèves
moins de 4	3
4 à moins de 8	19
8 — 12	42
12 — 16	26
16 à 20	10

CONVENTION. — La limite supérieure de la classe ne fait pas partie de la classe. Ainsi la note 12 est comptée dans la classe de 12 à 16 qui ne comprend que les notes x telles que $12 \leqslant x < 16$; classe notée [12,16[.

7. Tableaux statistiques. — ***On appelle effectif total d'une population le nombre d'éléments de cette population.***

L'effectif d'une valeur ou le *nombre des répétitions* représente le nombre d'unités qui possèdent, dans la population, la valeur correspondante de la variable. On dit aussi *fréquence absolue.*

La fréquence d'une valeur x_i de la variable est le rapport de l'effectif de cette valeur à l'effectif total. On la note $f(x_i)$.

$$f(x_i) = \frac{\text{Effectif de } x_i}{\text{Effectif total}} = \frac{n_i}{n}.$$

On dit aussi fréquence relative.

EXEMPLE. — Dans l'étude précédente, l'effectif de la population d'élèves est 100. L'effectif de la note 13 est 8.

La fréquence de la note 5 est $\frac{4}{100}$ ou 4 %.

On peut compléter le tableau précédent en figurant dans la colonne 3 les fréquences relatives et dans les colonnes suivantes les *résultats cumulés* dont les explications font suite au tableau :

Résultats				Résultats cumulés			
Classe des notes	Effectifs	Fréquences	Fréquences %	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroiss.	Fréquences cumulées croissantes	Fréquences cumulées décroiss.
moins de 4	3	0,03	3	3	100	0,03	1
[4,8[	19	0,19	19	22	97	0,22	0,97
[8,12[	42	0,42	42	64	78	0,64	0,78
[12,16[	26	0,26	26	90	36	0,90	0,36
[16,20]	10	0,10	10	100	10	1	0,10

8. Interprétation des résultats cumulés. — Dans la colonne 5, figurent les effectifs cumulés croissants. Par définition, *l'effectif cumulé croissant d'une classe est la somme des effectifs de cette classe et des classes antérieures.* Ainsi :

1re ligne : il y a 3 élèves ayant une note inférieure à 4.
2e ligne : il y a $3 + 19 = 22$ élèves ayant une note inférieure à 8.
3e ligne : il y a $22 + 42 = 64$ élèves ayant une note inférieure à 12.
4e ligne : il y a $64 + 26 = 90$ élèves ayant une note inférieure à 16.
5e ligne : 100 élèves ont une note inférieure ou égale à 20.

Dans la colonne 6, figurent les effectifs cumulés décroissants.

L'effectif cumulé décroissant d'une classe est la somme des effectifs de cette classe et des classes postérieures. Ainsi :

5e ligne : 10 élèves ont une note supérieure ou égale à 16.
4e ligne : $10 + 26 = 36$ élèves ont une note supérieure ou égale à 12.
3e ligne : $36 + 42 = 78$ élèves ont une note supérieure ou égale à 8 et ainsi de suite.

Les colonnes relatives aux fréquences cumulées s'en déduisent immédiatement.

9. Série statistique à caractère discontinu. — Présentons une série statistique à *caractère discontinu*, traduisant la répartition des résidences principales d'après le nombre de pièces, à Paris en 1963.

Unité : 1 000 logements

Nombre de pièces	Effectifs	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
1	392	392	1 169,20
2	403,20	795,20	777,20
3	220,32	1 015,52	374,00
4	78,30	1 093,82	153,68
5	36,88	1 130,70	75,38
6 et plus	38,50	1 169,20	38,50
	1 169,20		

Nous interprétons partiellement ce tableau, en dénombrant :

220 320 logements de 3 pièces;
1015 520 logements comprenant ***au plus*** 3 pièces;
374 000 logements comprenant ***au moins*** 3 pièces.

10. Séries chronologiques.

Les séries chronologiques présentent les grandeurs statistiques dans le temps.

Exemple : *Trafic de l'aéroport de Paris-Orly.*

Année	Mouvement d'avions	Passagers (arrivées et départs) *en milliers*
1950	23 241	352,2
1955	48 955	1 306,7
1962	89 235	3 539,2
1963	95 272	4031,7
1964	99 550	4451,7

11. Séries doubles. — Dans les séries précédentes, à chaque unité statistique correspondait une seule variable :

— une note (variable) à chaque composition (unité statistique);
— le nombre de pièces (variable) à chaque logement (unité statistique).

On peut observer deux variables sur une même unité statistique. Le résultat des observations sera mentionné dans un tableau à double entrée.

Exemple. — *Répartition des résidences principales d'après le nombre de pièces et le nombre d'occupants à Paris en 1963.*

Unité : 1 000 logements

Nombre d'occupants du logement	Logements composés de .... pièces d'habitation						Total des logements
	1	2	3	4	5	6 et plus	
1	233,44	129,26	35,96	7,36	2,26	2,52	410,80
2	105,52	150,38	78,52	22,36	7,38	4,30	368,46
3	34,90	75,70	52,44	18,50	8,22	6,12	195,88
4	12,22	38,18	31,86	14,94	8,06	6,94	106,20
5	3,76	10;62	13,46	8,44	5,44	7,06	48,78
6 et plus	2,16	5,06	8,08	6,70	5,32	11,56	38,88
Total	392,00	403,20	220,32	78,30	36,68	38,50	1 169,00

Interprétation des nombres portés dans le tableau :

233 440 logements de 1 pièce sont occupés par 1 personne.
8 220 logements de 5 pièces sont occupés par 3 personnes.
Il existe 403 200 logements de 2 pièces et 38 880 logements contenant 6 personnes et plus.

SYSTÈME DE NOTATIONS.

12. Signe de sommation $\sum$. — Dans les séries statistiques, les valeurs du caractère quantitatif (nº 4) pourront être désignées par les lettres $x_1, x_2, \dots x_p$ et les effectifs correspondants de la population (nº 7) par $n_1, n_2, \dots n_p$.

L'effectif total est $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ que l'on exprime en utilisant le signe $\sum$ (lire : grand sigma) par la formule

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} n_i = n}$$

L'expression $\sum_{i=1}^{p} x_i$ se lit : « somme de la variable x_i, pour l'indice i variant de 1 à p ».

Avec les mêmes notations $\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

13. Expressions usuelles.

1º $\sum_{i=1}^{5} n_i x_i = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_5 x_5$.

2º $\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i + y_i) = n_1(x_1 + y_1) + n_2(x_2 + y_2) + \cdots + n_k(x_k + y_k)$,

soit, en développant :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i + \sum_{i=1}^{k} n_i y_i}$$

3º Si $a_i = a$ pour tout i, (a constant)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a = na}$$

4º $\sum_{i=1}^{n} (x_i + a) = (x_1 + a) + \cdots + (x_n + a) = na + \sum_{i=1}^{n} x_i$.

5º $\sum_{i=1}^{n} a x_i = a x_1 + a x_2 + \cdots + a x_n = a(x_1 + x_2 + \cdots x_n)$

soit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a x_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

14. Applications. — *Calculer* $\sum_{i=1}^{n} (x_i + a_i)^2$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + a_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2a_i x_i + a_i^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Si $a_i = a$, $\forall_i$, la relation s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + a)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + na^2.$$

REMARQUE. — Dans la suite, lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté possible, on simplifiera l'écriture du symbole $\sum_{i=1}^{n}$ par $\sum_{i}$, et parfois par $\sum$.

EXERCICES

Dépouillement d'une collecte d'observations.

1. On a relevé les deux derniers chiffres minéralogiques de 80 voitures, au fur et à mesure de leur passage.

34	01	09	34	11	75	75	94	90	75	08	35	36	45	41	34
19	75	75	06	13	23	25	19	15	11	66	75	11	34	38	45
15	12	34	66	69	75	94	92	34	08	54	45	75	12	34	19
03	26	45	75	66	33	33	75	34	75	12	29	11	67	38	36
69	75	03	06	75	34	34	15	12	11	66	45	35	29	67	59

Dépouiller les renseignements fournis et présenter les résultats du dépouillement sous forme d'un tableau statistique suivant les classes :

[00,10[[10,20[[20,30[[30,40[[40,50[[50,60[..., [90,99].

2. On a procédé au recensement de 46 familles d'une ville en relevant le nombre des enfants à la charge de chacune d'elles. Au hasard de ses déplacements, le statisticien dresse le tableau suivant où chaque nombre représente celui des enfants d'un ménage :

1	2	0	3	0	1	4	2	2	0	1	6	2	3	0	7	1	1	0	3	2	1	3
3	1	1	0	7	2	1	5	0	3	1	2	2	6	1	1	0	2	1	2	1	2	4

Regrouper ces résultats suivant un tableau à 2 colonnes contenant la variable (nombre d'enfants) et les effectifs (nombre de ménages).

Calcul des fréquences. Tableau des effectifs cumulés.

3. A Paris, la répartition des salles de cinéma suivant le prix moyen des places pratiqué au cours de l'année 1964 (format standard) est fourni par le tableau :

Prix	Nombre de salles	Prix	Nombre de salles
moins de 1,40	440	de 1,90 à 1,99	460
de 1,40 à 1,49	332	de 2 à 2,49	1 342
de 1,50 à 1,59	413	de 2,50 à 2,99	521
de 1,60 à 1,69	469	de 3 à 3,99	363
de 1,70 à 1,79	568	de 4 à 4,99	98
de 1,80 à 1,89	492	plus de 5	78

Établir un tableau où figureront les fréquences en % et les effectifs cumulés croissants et décroissants.

4. La répartition suivant l'âge des conducteurs de cycles victimes d'accidents corporels de la circulation routière en 1963 est fourni par le tableau :

Ages	Tués	Blessés	Ages	Tués	Blessés
0 à 4 ans	1	12	35 à 44 ans	70	1 675
5 à 14 ans	104	3 016	45 à 54 ans	130	2 004
15 à 24 ans	65	3 644	55 à 64 ans	212	2 390
25 à 34 ans	46	1 700	65 et plus	185	1 271

1° Déterminer les fréquences en % des effectifs tués ou blessés.

2° Établir le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants, ainsi que leurs fréquences (tués ou blessés).

5. La répartition des livrets de caisse d'épargne ordinaire, en métropole, suivant leur importance, au 31 décembre 1964, est fourni par le tableau :

Sommes versées F	Nombre de livrets *(en milliers)*	Sommes versées	Nombre de livrets *(en milliers)*
Moins de 1,01	1 825	5 000 à 7 500	722
1,01 à 30	5 377	7 500 à 10 000	557
30,01 à 1 000	4 571	10 000 à 12 500	601
1 000 à 2 500	1 427	12 500 à 15 000	261
2 500 à 5 000	1 084	au-dessus de 15 000	254

Déterminer les fréquences en % et établir le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.

6. Tableau à double entrée. — Faire inscrire sur une feuille, par chaque élève de la classe, son poids et sa taille. Regrouper les résultats dans un tableau à double entrée (série double) après avoir choisi les classes de poids et les classes de taille.

7. Décomposition par âge, au 31 décembre 1963, de l'effectif ouvrier fond et jour, des houillères de France (Sources : Charbonnages de France).

Age	Effectif	Age	Effectif	Age	Effectif	Age	Effectif	Age	Effectif
14	57	24	3 484	34	5 552	44	4 355	54	2 483
15	610	25	4 039	35	6 000	45	3 699	55	1 158
16	1 449	26	4 490	36	6 155	46	2 871	56	566
17	1 876	27	4 359	37	6 290	47	2 729	57	412
18	1 541	28	4 289	38	6 576	48	3 371	58	290
19	924	29	4 765	39	6 440	49	4 732	59	215
20	670	30	4 579	40	6 379	50	3 640	60	48
21	1 882	31	5 173	41	6 469	51	3 126	61	7
22	2 151	32	5 398	42	6 431	52	2 712	62	8
23	3 194	33	5 744	43	6 518	53	2 694	63	3

1° Présenter les résultats sous forme d'un tableau statistique où les observations seront groupées par classes d'amplitude 5 : de 14 à 18; de 19 à 23, etc.

2° Indiquer dans le tableau les fréquences, les effectifs cumulés croissants et décroissants.

Signe $\sum$

8. Développer et calculer :

$$\sum_{i=1}^{8} (x_i + 5) \qquad \sum_{i=1}^{5} 3\, x_i \qquad \sum_{i=a}^{b} 8\, x_i \qquad (a \text{ et } b \text{ entiers naturels})$$

$$\sum_{i=n}^{m} (x_i - 3) \qquad \sum_{k+1}^{2k} (x_i - m) \qquad \sum_{n}^{2n} m\,(x_i + b)$$

9. Développer et calculer :

$$\sum_{i=1}^{4} (x_i - 1)^2 \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - 3)^2 \qquad \sum_{i=k}^{2k} (x_i + a)^2$$

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES SÉRIES

15. Présentation graphique des séries statistiques. — Pour donner une idée synthétique des tableaux numériques, on utilise généralement une représentation graphique sur un repère cartésien. L'axe Ox représente les valeurs du caractère quantitatif et l'axe Oy les valeurs des effectifs ou des fréquences.

Les graphes des séries statistiques simples se présentent sous deux formes : *le diagramme en bâton* et *l'histogramme.*

16. Le diagramme en bâton. — Il est surtout utilisé pour schématiser les séries statistiques correspondant à un caractère discret (variable discontinue, n° 4). A chaque valeur x_i de la variable, faisons correspondre un segment parallèle à l'axe Oy dont la *longueur* représente *l'effectif* n_i ou la *fréquence* $f(x_i)$.

EXEMPLE. — *Répartition d'après le nombre d'enfants du personnel d'un lycée.*

Nombre d'enfants x_i	Effectifs n_i	Effectifs cumulés croissants
1	13	13
2	25	38
3	20	58
4	12	70
5	6	76
6	3	79
7	1	80

Nous obtenons :

— le diagramme en bâtons de la série (fig. 1);

— le diagramme en bâtons de la série cumulée croissante (fig. 2).

17. Histogramme d'une série statistique. — C'est le diagramme qui correspond aux séries à *variable quantitative continue.*

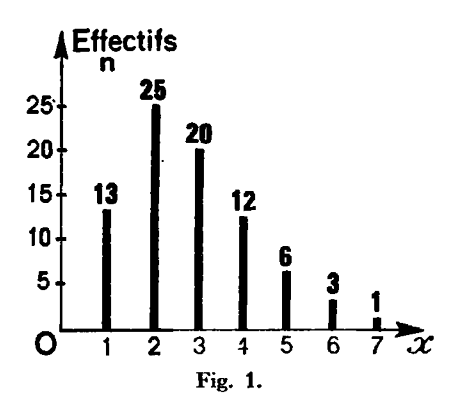


Fig. 1.

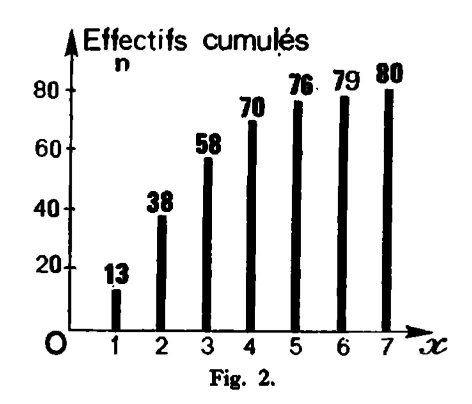


Fig. 2.

Exemple. — *On donne la répartition des élèves d'un lycée d'après leurs tailles.*

Tailles *(cm)* x_i	[150,154[	[154,158[	[158,162[	[162,166[	[166,170]	Total
Effectifs n_i	25	50	200	175	50	500

Sur la figure n° 3, une classe de tailles admet pour image un rectangle dont un côté porté par Ox représente l'amplitude de la classe (4 cm) et dont la hauteur parallèle à Oy représente l'effectif correspondant.

L'ensemble des cinq rectangles constitue l'histogramme de la série.

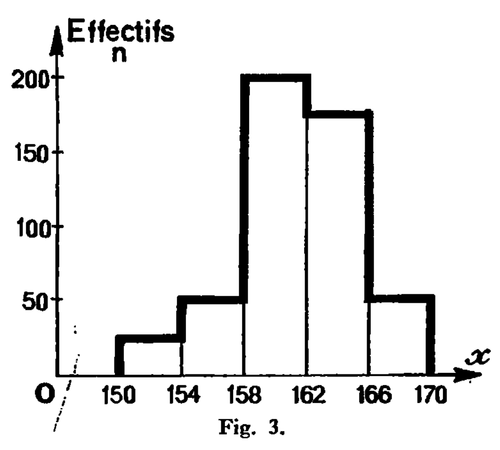


Fig. 3.

18. Remarques importantes.

1° Si l'unité d'aire (fig. 3) est celle du rectangle ayant pour dimensions les unités portées par Ox et Oy, l'aire limitée par l'ensemble des rectangles, lorsque *les classes ont même amplitude*, est le produit de l'intervalle de classe par la somme des longueurs des côtés parallèles à Oy. Cette somme représente l'effectif total. On déduit le résultat :

L'aire de l'histogramme est proportionnelle à l'effectif total.

2° *Les classes n'ont pas la même amplitude.*

Considérons une série statistique obtenue à partir de la précédente, en remplaçant la colonne

166 à 170
50

par la colonne

166 à 174
50

Le rectangle correspondant à la classe [166, 170[(fig. 4) de l'histogramme (fig. 3) est remplacé dans le nouveau diagramme par le rectangle ayant pour base l'intervalle [166, 174[et pour hauteur 25 et *non* 50 (fig. 5). Cela revient à admettre qu'il existe 25 élèves ayant une taille comprise entre 166 cm et 170 cm, et 25 élèves ayant une taille définie dans l'intervalle [170, 174[.

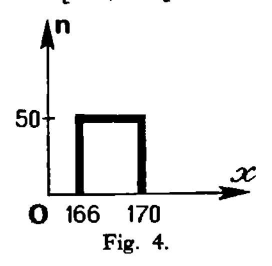


Fig. 4.

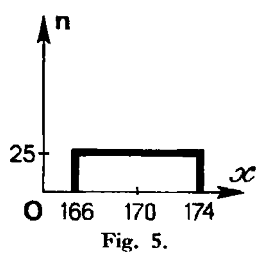


Fig. 5.

Plus généralement, pour la *construction de l'histogramme* d'une série, si l'amplitude d'une classe est *multipliée par k, l'effectif* correspondant doit être *divisé par k.*

Cette remarque met en évidence le résultat suivant :

Dans un histogramme, l'aire d'un rectangle est proportionnelle à son effectif.

19. Polygone des effectifs. — Considérons l'histogramme (fig. 6) correspondant à la série statistique du n° 17, dont les classes ont même amplitude.

On appelle centre de classe, la moyenne arithmétique des valeurs extrêmes de la classe.

Ainsi, le centre de la classe [154, 158[est : $\frac{154 + 158}{2} = 156$ cm.

Le polygone des effectifs s'obtient en joignant les points de l'histogramme admettant pour abscisses les centres des classes et pour ordonnées, les effectifs correspondants.

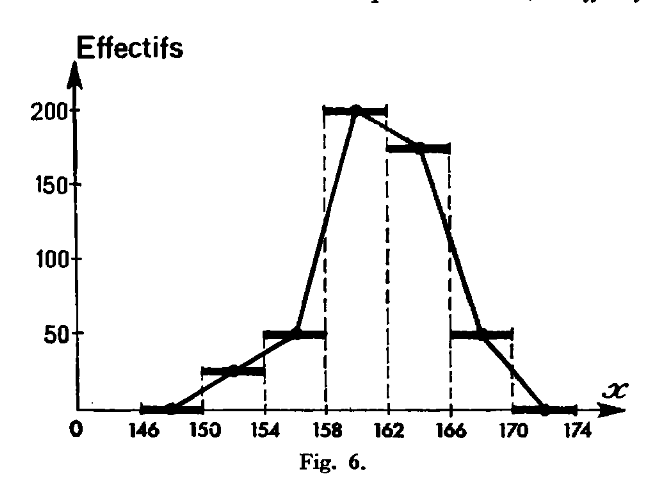


Fig. 6.

On peut le compléter aux extrémités par les points de l'axe Ox, ayant pour abscisses les milieux des segments relatifs aux classes précédant et suivant la série (fig. 6). Ainsi le polygone des effectifs et l'axe Ox limitent une surface dont l'aire est proportionnelle à l'effectif total.

Ce polygone donne une idée générale de la série étudiée. Si l'axe Oy est l'axe des fréquences, nous obtenons le *polygone des fréquences.*

Courbe de fréquence :

Si l'effectif d'une série est suffisamment nombreux pour qu'on puisse partager son étendue en classes dont le nombre est de plus en plus grand et l'intervalle de plus en plus petit, on obtient un histogramme composé de rectangles très étroits. Le polygone des fréquences correspondant tend vers une *courbe limite* lorsque le nombre des rectangles augmente indéfiniment, c'est-à-dire lorsque l'intervalle de classe tend vers zéro. Cette courbe limite est appelée *courbe de fréquence.*

20. Polygones des effectifs cumulés. Courbes cumulatives. — Reprenons la série du n° 17. Mentionnons, dans un tableau, les effectifs cumulés croissants et décroissants.

Tailles *(cm)* x_i	Effectifs n_i	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants	Fréquences $f(x_i)$
150 à moins de 154	25	25	500	0,05
154 — 158	50	75	475	0,10
158 — 162	200	275	425	0,40
162 — 166	175	450	225	0,35
166 à 170	50	500	50	0,10

1° La figure n° 7 représente le *polygone des effectifs cumulés croissants*, obtenu en joignant les points de coordonnées :

(150, 0) (154, 25) (158, 75)
(162, 275) (166, 450) (170, 500).

L'abscisse de l'un des points, sauf le premier, est la valeur de l'extrémité droite de la classe; l'ordonnée correspondante est l'effectif cumulé croissant.

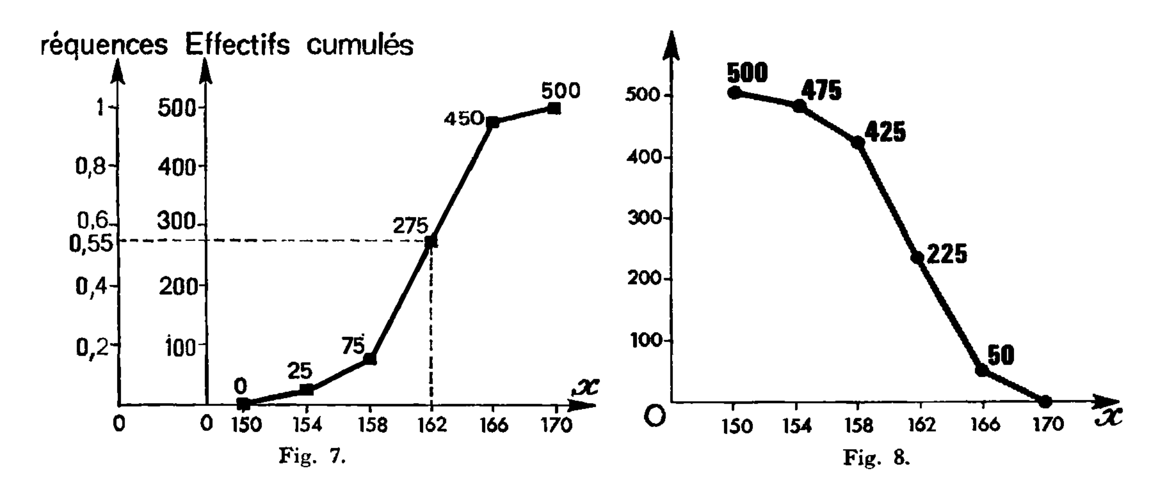


Fig. 7. Fig. 8.

2° La figure n° 8 représente le *polygone des effectifs cumulés décroissants*, obtenu en joignant les points de coordonnées :

(150, 500) (154, 475) (158, 425)
(162, 225) (166, 50) (170, 0).

L'abscisse de l'un des points, sauf le dernier, est la valeur de l'extrémité gauche de la classe; l'ordonnée correspondante est l'effectif cumulé décroissant.

3° On vérifie facilement, en utilisant l'échelle des fréquences (fig. 7), que $\frac{275}{500} = 0{,}55$, soit 55 % des élèves, ont une taille inférieure à 162 cm.

REMARQUE. — En remplaçant les effectifs par les fréquences, on **obtient** le *polygone des fréquences cumulées* croissantes ou décroissantes.

Lorsque l'intervalle de classe tend vers zéro, dans les mêmes conditions qu'au n° 19, le polygone des fréquences cumulées tend vers une courbe dite *courbe des fréquences cumulées* et le polygone des effectifs cumulés tend vers la courbe des effectifs cumulés.

Les courbes précédentes sont encore appelées *courbes cumulatives.*

21. Diagramme des séries chronologiques. — Représentons sur un diagramme (fig. 9), la production de fonte brute en France, exprimée en millions de tonnes (source : Charbonnages de France).

Année	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
Production	11,5	11,9	12	12,5	14,1	14,6	14	14,3

Sur Ox, chaque intervalle représente une année dont le millésime est écrit sous l'intervalle correspondant. Les abscisses des points figuratifs du diagramme sont situées au milieu des intervalles.

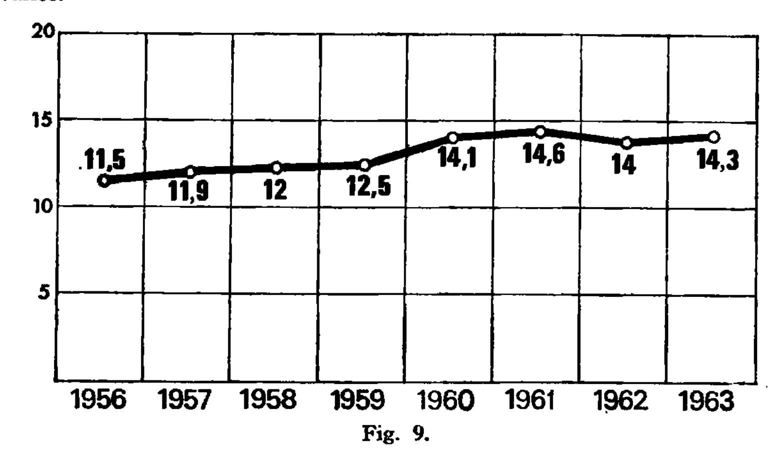


Fig. 9.

AUTRES DIAGRAMMES

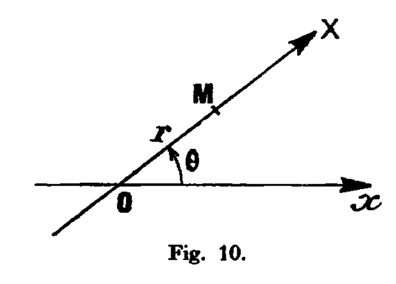


Fig. 10.

22. Diagramme polaire.

1° *Coordonnées polaires d'un point.* — Dans un repère orthonormé xOy, considérons un point M et traçons l'axe OX admettant OM pour support (fig. 10). Posons :

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \theta \qquad \overline{OM} = r.$$

Le couple de nombres (θ, r) constitue un système de coordonnées polaires du point M.

2° Le diagramme polaire est utilisé pour représenter une distribution chronologique admettant un cycle périodique tel que la semaine, le mois, le trimestre, l'année.

EXEMPLE. — Représentons, sur un diagramme polaire, les températures moyennes mensuelles de l'air à la station de Montpellier en 1965 (Source : Météorologie nationale).

Mois	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
$t°$	6,4	4,3	9,8	13,2	16,3	20	21,4	21,2	17,4	15,9	10,5	8,8

Le diagramme polaire (fig. 11) s'obtient en traçant douze rayons représentant les différents mois et sur lesquels on définit un point image de la température enregistrée.

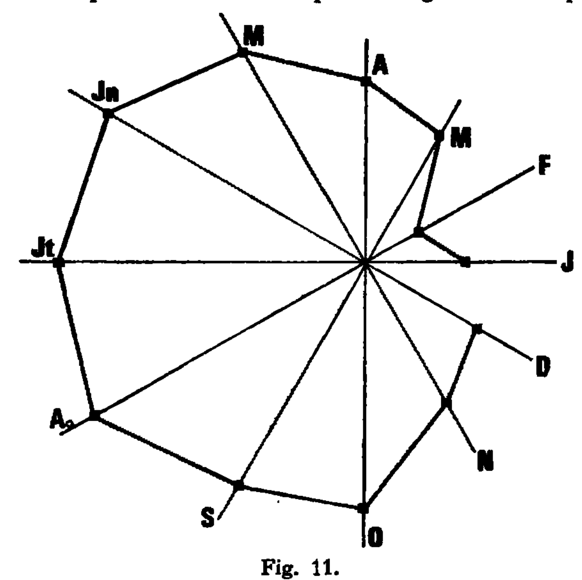


Fig. 11.

23. Diagrammes semi-logarithmiques. — Les échelles utilisées dans les diagrammes précédents étaient métriques. Supposons que l'on veuille tracer le graphique relatif à la série suivante :

Nombres de postes de télévision dans la Lozère.

Année	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
Effectif	8	66	307	777	1 371	2 207	3 251	4 421	5 423

Il est difficile de représenter le graphique à cause de la différence importante entre le nombre de postes en 1957 et celui de 1965. Aussi utilise-t-on une échelle logarithmique.

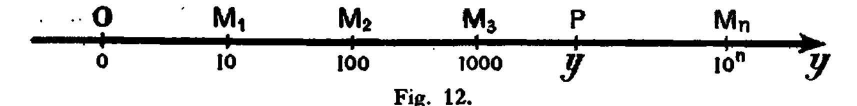


Fig. 12.

Définition d'une échelle logarithmique.

Sur l'axe Oy (fig. 12), définissons les points M_1, M_2, M_3,... M_n, par les relations :

$$\overline{OM_1} = \log 10 = 1 \qquad \overline{OM_2} = \log 100 = 2 \qquad \overline{OM_3} = \log 1\,000 = 3$$

$$\overline{OM_n} = \log 10^n = n.$$

Sur l'axe logarithmique Oy, les nombres 10, 10^2, 10^3,... 10^n marqués en regard des points M_1, M_2, M_3, ... M_n représentent leurs cotes. Ainsi, si P appartient à cet axe, la cote de P est le nombre y tel que

$$\overline{OP} = \log y.$$

Pour construire le diagramme de la série précédente (fig. 13), nous avons défini :

$\log 8 = 0{,}903\ 09$
$\log 66 = 1{,}819\ 54$
$\log 307 = 2{,}487\ 44$
$\log 777 = 2{,}890\ 42$
$\log 1371 = 3{,}137\ 04$
$\log 2207 = 3{,}343\ 80$
$\log 3251 = 3{,}511\ 28$
$\log 4421 = 3{,}645\ 52$
$\log 5423 = 3{,}734\ 24$

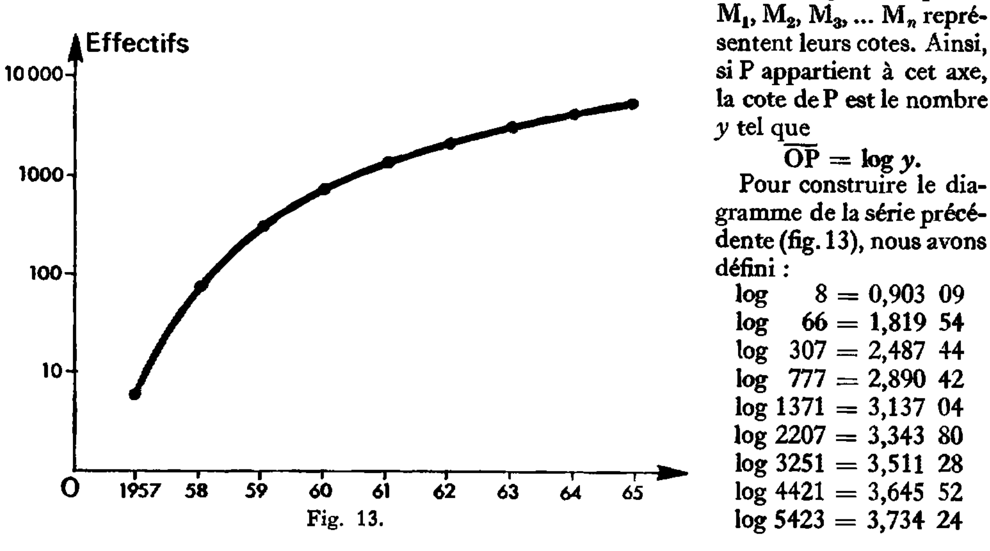


Fig. 13.

24. Diagramme à secteurs. — Il comprend un cercle, ou un demi-cercle divisé en secteurs proportionnels aux différents constituants de la population étudiée.

Exemple. — En 1964, 1 535 millions de tonnes de marchandises ont été transportées en France. Les bateliers en ont acheminé 86 millions de tonnes, les chemins de fer 248 millions et les routiers 1 202 millions. Les pourcentages correspondants sont : 6 %, 16 %, 78 %, ce qui correspond sur le diagramme (fig. 14) à des angles au centre de 12 grades, 32 grades, 156 grades.

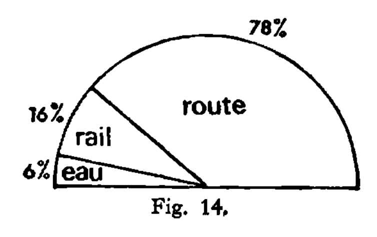


Fig. 14.

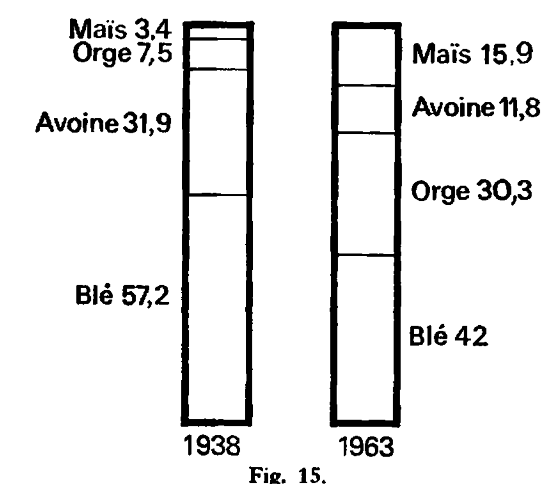


Fig. 15.

25. Diagramme en barres. — Ce diagramme, constitué de plusieurs rectangles accolés, permet de mettre en évidence les grandeurs relatives des différentes parties d'un ensemble.

EXEMPLE. — Évolution de la production (en millions de quintaux) des principales céréales en France en 1938 et 1963 (source : min. de l'Agriculture).

Année	Blé	Orge	Avoine	Maïs
1938	98 010	12 908	54 574	5 786
1963	102 490	73 840	28 760	38 707

Le diagramme en barres (fig. 15) fait apparaître le pourcentage de la production des céréales en 1938 et 1963.

PROBLÈME RÉSOLU

Un groupe de 50 enfants a lancé un poids. Les distances en mètres sont indiquées dans le tableau :

Distance m	moins de 3	3 à < 4	4 à < 5	5 à < 7	7 à < 8	plus de 8
Effectifs	3	5	10	24	6	2

1° Tracer l'histogramme des fréquences relatives et le polygone des fréquences.
2° Tracer la courbe des fréquences cumulées.
3° Déterminer le nombre d'enfants qui lancent le poids à une distance inférieure à 6 m.

La série statistique présente des intervalles de classes inégaux. En choisissant *un* mètre pour unité des classes, nous introduisons [2 m, 3 m[pour la 1re classe et [8 m, 9 m,[pour la 6e classe. Pour tracer l'histogramme et le polygone des fréquences (fig. 16), nous rectifions les fréquences, en utilisant la remarque du n° 18.

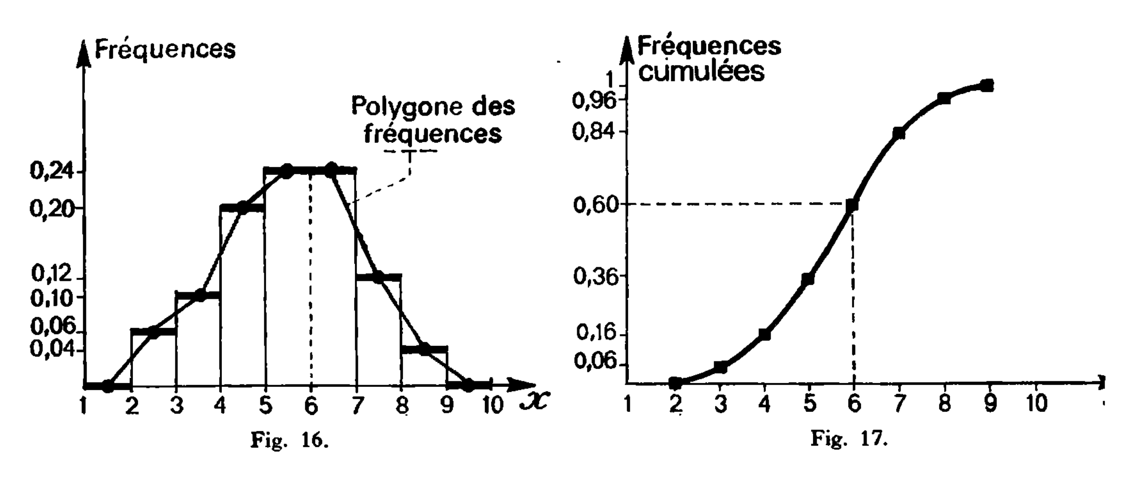


Fig. 16.

Fig. 17.

Les résultats sont consignés dans le tableau :

Classes	Intervalle de classe	Effectifs y_i	Fréquences relatives	Fréquences cumulées	Fréquence rectifiée
2 à 3	1	3	0,06	0,06	
3 à 4	1	5	0,10	0,16	
4 à 5	1	10	0,20	0,36	
5 à 7	2	24	0,48	0,84	0,48 : 2 = 0,24
7 à 8	1	6	0,12	0,96	
8 à 9	1	2	0,04	1,00	

Sur la courbe des fréquences cumulées croissantes (fig. 17), nous obtenons par lecture directe la fréquence cumulée correspondant à une distance de 6 m, soit 0,60 ou 60 %.

Le nombre d'enfants qui lancent le poids à une distance inférieure à 6 m est :

$$\frac{60}{100} \times 50 = 30 \text{ enfants.}$$

On déduit que 20 enfants le lancent à une distance supérieure à 6 m.

EXERCICES

Séries à caractère discontinu. Diagrammes en bâton.

10. D'après la distribution suivante du nombre d'enfants à la charge des familles :

Enfants	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Familles	144	195	130	80	58	45	24	6	3

1° Établir un tableau où figureront : chaque classe, les effectifs, les fréquences, les effectifs cumulés croissants et décroissants.

2° Tracer les diagrammes en bâtons des effectifs, des effectifs cumulés croissants et décroissants.

11. D'après la répartition des résidences principales suivant le nombre d'occupants dans le département de la Seine (source I.N.S.E.E., recensement 1962) :

Unité : 1 000 logements

Occupants	1	2	3	4	5	6
Logements	612,16	661,94	408,16	248,58	124,68	102,96

1° Tracer le diagramme en bâtons, les diagrammes cumulés croissants et décroissants des effectifs.

2° Quelles sont les fréquences relatives cumulées des logements ayant un nombre d'occupants inférieur ou égal à n ($1 \leqslant n \leqslant 6$) ? Représentation graphique.

Séries à caractère continu. Histogramme.

12. Répartition des naissances des enfants suivant l'âge de la mère en 1963 en France (Source I.N.S.E.E.) :

Moins de 20 ans	20 à 24 ans	25 à 29 ans	30 à 34 ans	35 à 39 ans	40 ans et plus
42 474	239 270	275 600	181 001	90 016	29 738

1° Dresser un tableau contenant les classes d'âge, les effectifs, les effectifs cumulés croissants et décroissants.

Indication : on admettra que l'effectif des moins de 20 *ans correspond à la classe d'âge* [15, 19] *et l'effectif des plus de* 40 *ans à la classe d'âge* [40, 45].

2° Tracer l'histogramme des effectifs.

3° Tracer les courbes des effectifs cumulés croissants et décroissants.

13. Structure de la population active par âge dans les Hauts-de-Seine (en millions d'individus).

Age au 1er janvier 1963	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
Nombre	30,54	51,04	79,80	87,10	80,08	71,92	58,62
Age	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75 et plus	
Nombre	70,62	66,06	45,38	17,70	5,36	3,22	

1° Dresser un tableau contenant les effectifs, les fréquences relatives, les effectifs cumulés croissants et décroissants.

2° Tracer l'histogramme des effectifs et les courbes cumulatives des effectifs.

14. Reprendre les exercices nos 3, 4, 7 et tracer l'histogramme des effectifs et les courbes cumulatives des effectifs.

Diagrammes polaires.

Représenter, au moyen d'un diagramme polaire, les séries statistiques suivantes :

15. Nombre de mariages par trimestre en 1950 et 1951 dans le département de l'Aude (source I.N.S.E.E.).

Année	1er trim.	2e trim.	3e trim.	4e trim.
1950	324	497	397	603
1951	308	446	390	542

16. Nombre d'enfants nés vivants par mois, exprimé en milliers, en France (source I.N.S.E.E.).

Année	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
1959	71,7	65,5	72,5	71,0	73,1	67,5	70,8	69,6	67,5	67,1	63,6	65,7
1960	67,7	65,7	70,4	68,5	73,0	68,7	71,6	69,7	67,9	65,7	61,4	65,9
1961	71,5	65,6	73,0	72,3	75,1	69,6	71,3	69,5	67,2	67,9	64,8	67,8

17. Étant donné l'évolution de l'indice des prix de détail dans l'agglomération parisienne de 1960 à 1963 (base 100 : juillet 1956).

	1960	1961	1962	1963
Janvier	130,1	133,1	139,2	146,6
Février	130,4	133,2	139,0	146,8
Mars	130,4	133,1	139,7	146,8
Avril	130,6	133,0	139,8	147,4
Mai	130,3	132,7	140,6	148,1
Juin	130,2	132,4	141,1	149,1
Juillet	130,7	133,4	141,8	150,0
Août	131,9	134,2	141,5	150,7
Septembre	132,1	134,9	142,0	151,9
Octobre	132,3	136,4	142,6	152,2
Novembre	132,7	137,8	143,9	153,1
Décembre	133,0	138,3	144,7	153,4

Représenter graphiquement la série statistique en coordonnées polaires.

Diagramme semi-logarithmique.

18. On considère la production d'une « Fabrication » lancée en 1962 :

Année x_i	1961	1962	1963	1964	1965	1966
Production (unités y_i)	9	101	1 089	10 480	99 890	1 001 028

1° Représenter dans un graphique la série précédente.

2° Si on pose $x = 1$ pour l'année 1961.
$x = 2$ pour l'année 1962, etc.

et y la production, montrer que $x \approx \log y$ (relation approximative qui lie y à x).

19. 1° Tracer deux axes rectangulaires gradués de la façon suivante : l'axe horizontal porte une échelle arithmétique, l'axe vertical une échelle logarithmique. Construire cette échelle de 1 à 12 à l'aide des renseignements suivants :

$\log 2 = 0{,}301\ 03$ $\quad \log 3 = 0{,}477\ 12$ $\quad \log 7 = 0{,}845\ 10.$ $\quad \log 11 = 1{,}041\ 39.$

2° Utiliser le tracé précédent pour représenter en coordonnées semi-logarithmiques les productions de deux usines (en millions de tonnes).

	1957	1961
Usine A..................	2	6
Usine B..................	4	12

En joignant les points représentatifs de la production de chaque usine, on obtient deux segments parallèles. Expliquer pourquoi.

(*Baccalauréat*).

ÉLÉMENTS CARACTÉRISTIQUES D'UNE SÉRIE

VALEURS TYPIQUES

26. Généralités. — Les diagrammes des séries statistiques étudiées précédemment (diagramme en bâton, histogramme) ont mis en évidence une accumulation des effectifs dans le voisinage d'une valeur particulière du caractère et un certain étalement des effectifs de part et d'autre de cette valeur.

Nous introduisons deux éléments caractéristiques dans l'étude d'une série statistique :

— *les valeurs typiques ou valeurs centrales :* le *mode*, la *médiane*, la *moyenne*.

— les *indices de dispersion*.

27. Le mode. — ***Le mode est la valeur du caractère correspondant à l'effectif le plus élevé.***

Dans la série statistique étudiée au n° 16 : « répartition du personnel d'un lycée d'après le nombre d'enfants », le mode est 2, correspondant au plus fort effectif 25.

Dans la série du n° 17 : « répartition des élèves d'un lycée d'après leur taille », on considère la *classe modale* (ou *classe dominante*), [158, 162[qui comprend le plus grand nombre d'élèves : 200. La valeur centrale de la classe, 160 cm, est le mode de la série.

REMARQUE. — Le mode est une valeur type, d'un usage limité, et perd toute signification dans une série dite *plurimodale* qui admettrait plusieurs maxima relatifs.

28. La médiane. — ***La médiane est la valeur du caractère qui partage la série suivant des effectifs égaux.***

Les notes obtenues par un élève, au cours d'une semaine, sont :

4, 7, 7, 11, 13, 15, 17.

La médiane de cette distribution est 11, car trois notes lui sont inférieures et supérieures.

Si le nombre des notes est pair ($n = 2p$), tout nombre compris entre la $p^{\text{ième}}$ et la $(p + 1)^{\text{ième}}$ valeur peut être médiane. On choisira la demi-somme. Ainsi, dans la répartition :

5 7 8 8 9 11 13 14 14 16,

la médiane est $$\frac{1}{2}(9 + 11) = 10.$$

REMARQUE. — Dans la distribution suivante : 9 9 9 [9] 11 12 13,

le nombre encadré 9 occupe la position de la médiane. Aucune note n'est inférieure à 9; trois notes lui sont supérieures. Il n'y a donc pas de médiane dans cette série.

29. Calcul de la médiane d'une série à variable continue. — Reprenons la répartition des élèves d'un lycée d'après leur taille (nº 17) et dressons le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.

Tailles *(cm)* x_i	Effectifs n_i	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
150 à moins de 154	25	25	500
154 à — 158	50	75	475
158 à — 162	200	275	425
162 à — 166	175	450	225
166 à — 170	50	500	50

Nous cherchons la taille de la $\frac{500}{2} = 250^e$ personne. Le tableau montre que 75 élèves ont une taille inférieure à 158 cm. La taille médiane se situe dans la classe [158, 162[. Admettons que la taille des 200 enfants qui se trouvent dans cette classe varie régulièrement. Nous effectuons une interpolation linéaire. La valeur médiane M est donc :

$$M = 158 + (162 - 158) \times \frac{250 - 75}{275 - 75} = 158 + 4 \times \frac{175}{200} = 161{,}5 \text{ cm.}$$

30. Détermination graphique de la médiane. — Le tracé de la courbe cumulative croissante C permet d'obtenir la médiane M en déterminant l'intersection de C avec la droite parallèle à Ox, « d'ordonnée 250 » (fig. 18).

On peut également utiliser la courbe cumulative C des effectifs décroissants (fig. 18). Il en résulte que l'intersection des deux courbes C et C' est un point P dont l'abscisse est la médiane M.

31. Remarque. — Si la médiane se prête assez mal au calcul algébrique, elle présente l'avantage de ne pas tenir compte des valeurs anormalement grandes ou petites qui peuvent intervenir dans la série. La médiane serait inchangée dans l'étude précédente (nº 29), s'il y avait dans le lycée un nain et un géant.

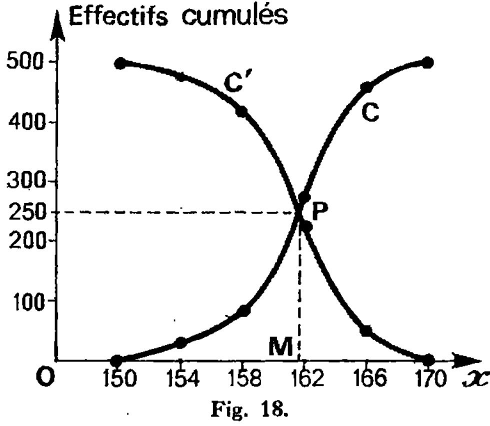


Fig. 18.

MOYENNE ARITHMÉTIQUE

32. Moyenne arithmétique simple. — Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les valeurs de n observations, la moyenne arithmétique est :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

EXEMPLE. — La moyenne arithmétique des notes 8, 10, 12, 14 obtenues par un élève est :

$$\bar{x} = \frac{8 + 10 + 12 + 14}{4} = 11.$$

33. Moyenne arithmétique pondérée. — Dans la distribution suivante, qui schématise une série à variable discontinue,

Variable x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_p
Effectif n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_i	$\cdots$	n_p

la moyenne arithmétique pondérée est définie par l'expression :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_ix_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i$$

en désignant par n l'effectif total.

Comme la fréquence $f(x_i) = \frac{n_i}{n}$ (n° 7), on déduit :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{p} x_i\, f(x_i).$$

Les n_i sont appelés *coefficients de pondération.*

EXEMPLE. — Les notes obtenues par un candidat à un examen dont les épreuves admettent pour coefficients 3, 5, 1, 1 sont respectivement 10, 12, 14, 8. Le coefficient 3 relatif à la note 10, correspond à l'effectif de cette note; autrement dit, la note 10 est obtenue trois fois. La série s'écrit :

Notes x_i	Effectifs n_i	Produits $n_i x_i$
10	3	30
12	5	60
14	1	14
8	1	8
	10	112

Moyenne : $\bar{x} = \frac{112}{10} = 11{,}2.$

34. Exécution des calculs pour une série à variation continue. — Déterminons à titre d'exemple, la moyenne arithmétique de la série des tailles étudiée au n° 17. Dans

l'application des formules précédentes (nº 32), x_i représente la valeur du centre de classe. Les calculs sont détaillés dans le tableau suivant :

Tailles (*cm*)	Centre de classes x_i	Effectifs n_i	Produits $n_i x_i$
150 — 154	152	25	3 800
154 — 158	156	50	7 800
158 — 162	160	200	32 000
162 — 166	164	175	28 700
166 — 170	168	50	8 400
		500	80 700

$$\bar{x} = \frac{80\,700}{500} = 161{,}4 \text{ cm.}$$

35. Simplification des calculs. — Le calcul précédent se simplifie en adoptant une moyenne provisoire x_0. Généralisons la méthode.

1º *Notations :*

x_i = valeur du caractère ou centre de classe.
n_i = effectif correspondant.
n = effectif total.
x_0 = moyenne provisoire.

2º *Calcul :*

Quel que soit i, $x_i = x_0 + (x_i - x_0)$.

Dans ces conditions :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \frac{1}{n}\sum [x_0 n_i + (x_i - x_0)n_i]$$

Développons :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_0 n_i + \frac{1}{n}\sum (x_i - x_0)\, n_i.$$

Or :

$$\frac{1}{n}\sum x_0 n_i = \frac{x_0}{n}\sum n_i = \frac{x_0}{n}\cdot n = x_0.$$

Donc :

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0)\, n_i.$$

3º *Exemple :*

Reprenons l'exemple du nº 34 et choisissons comme moyenne provisoire le centre de la classe [158, 162[, soit $x_0 = 160$. Présentons les calculs dans le tableau suivant :

Tailles	Centres de classes x_i	Effectifs n_i	$x_i - x_0$	$n_i(x_i - x_0)$	
150 à 154	152	25	-8	-200	
154 à 158	156	50	-4	-200	
158 à 162	160	200	0	0	0
162 à 166	164	175	4		700
166 à 170	168	50	8		400
		500		-400	1 100
				$+700$	

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1} (x_i - x_0)\, n_i \qquad \text{soit} \qquad \bar{x} = 160 + \frac{700}{500} = 161{,}4 \text{ cm.}$$

AUTRES MOYENNES

36. Moyenne géométrique. — La moyenne géométrique de deux nombres positifs x_1 et x_2 est le nombre g tel que $\boxed{g = \sqrt{x_1 x_2}}$

Plus généralement, la moyenne géométrique de plusieurs nombres positifs x_1, x_2, ..., x_n est le nombre g tel que $\boxed{g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$

Le calcul de la moyenne géométrique se fait en utilisant les logarithmes :

$$\log g = \frac{1}{n} (\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n).$$

Remarque. — Dans la distribution suivante :

Variable x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_p
Effectif n_i	n_1	n_2	...	n_i	...	n_p

la *moyenne géométrique pondérée* est définie par l'expression :

$$g = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_p^{n_p}} \qquad \text{où} \qquad n = \sum_{i=1}^{p} n_i$$

La formule logarithmique s'écrit : $\log g = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i \cdot \log x_i.$

37. Moyenne harmonique. — La moyenne harmonique de deux nombres x_1 et x_2 est le nombre h tel que

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right).$$

Plus généralement, dans le cas d'une série d'observations x_1, x_2, ..., x_p, d'effectifs n_1, n_2, ..., n_p, la moyenne harmonique h est définie par l'expression

$$\boxed{\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\frac{n_i}{x_i}} \quad \text{en posant } n = \sum_{i=1}^{p} n_i.$$

Remarquons que l'inverse de la moyenne harmonique est égale à la moyenne arithmétique pondérée des inverses des valeurs observées.

Exemple. — Un cycliste parcourt la distance AB $= d$ km à la vitesse de 40 km/h à l'aller et 30 km/h au retour. Le temps t pour parcourir le trajet est :

$$t = \frac{d}{40} + \frac{d}{20} = d\left(\frac{1}{40} + \frac{1}{30}\right) \text{ heures.}$$

La vitesse moyenne du cycliste est :

$$V = \frac{d \times 2}{t} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{30}} \text{ km/h}$$

soit :

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{40} + \frac{1}{30}\right).$$

V est donc la moyenne harmonique des vitesses aller et retour et non leur moyenne arithmétique.

38. Relation entre les trois moyennes. — On démontre que :

$$\boxed{\bar{x} \geqslant g \geqslant h}$$

Ce résultat se vérifie facilement pour deux observations de valeurs x_1 et x_2 positives

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad g = \sqrt{x_1 x_2}; \qquad \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right).$$

En effet :

— L'inégalité $\bar{x} \geqslant g$ entraîne :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1 x_2} \implies (x_1 + x_2)^2 \geqslant 4x_1x_2 \implies (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$$

— L'inégalité $g \geqslant h$ entraîne :

$$\sqrt{x_1x_2} \geqslant \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \implies x_1x_2 \geqslant \frac{4\,(x_1x_2)^2}{(x_1 + x_2)^2} \implies (x_1 + x_2)^2 \geqslant 4x_1x_2$$

qui est bien vérifié.

PROBLÈME RÉSOLU

Les salaires mensuels payés au personnel d'une entreprise se répartissent ainsi :

— de 800 à 900 F	4
— de 900 à 1 000 F	20
— de 1 000 à 1 100 F	107
— de 1 100 à 1 200 F	168
— de 1 200 à 1 300 F	122
— de 1 300 à 1 400 F	48
— de 1 400 à 1 500 F	21
— de 1 500 à 1 600 F	10

1° Établir la relation qui donne la moyenne arithmétique $\bar{x}$ des salaires en fonction de x_0 origine provisoire et k étendue d'une classe.

2° Appliquer cette relation au calcul du salaire moyen dans la série proposée.

3° Si on désigne par $\bar{x}$ la moyenne arithmétique, par Me la médiane, par Mo le mode, on montre que dans les séries de faible dissymétrie, comme celle proposée, il existe la relation $\bar{x} - Mo = 3(\bar{x} - Me)$.

Calculer Mo à partir de $\bar{x}$ et Me.

D'une façon générale posons :

x_0 moyenne provisoire.

k l'amplitude de l'intervalle de classe que nous choisissons pour unité.

x_i la valeur du centre de la classe d'ordre i.

La différence $x_i - x_0$ mesurée dans la nouvelle unité est k fois plus petite, soit :

$$u_i = \frac{x_i - x_0}{k} \iff x_i = x_0 + ku_i.$$

Calcul de la moyenne arithmétique $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum n_i x_i = \frac{1}{n}\sum n_i (x_0 + ku_i) = \frac{1}{n}\sum n_i x_0 + \frac{k}{n}\sum n_i u_i.$$

En posant $\bar{u} = \frac{1}{n}\sum n_i u_i$, il vient :

$$\boxed{\bar{x} = x_0 + k\bar{u}}$$

Appliquons ce résultat à la détermination du salaire moyen. Les calculs sont résumés dans le tableau suivant, dans lequel $x_0 = 1\,150$ et $k = 100$.

Classes	Centres de classes x_i	Effectifs n_i	$u_i = \frac{x_i - x_0}{k}$	$n_i u_i$		Effectif croissant
800 à 900	850	4	− 3	− 12		4
900 à 1 000	950	20	− 2	− 40		24
1 000 à 1 100	1 050	107	− 1	− 107		131
1 100 à 1 200	1 150	168	0	0	0	299
1 200 à 1 300	1 250	122	1		122	421
1 300 à 1 400	1 350	48	2		96	469
1 400 à 1 500	1 450	21	3		63	490
1 500 à 1 600	1 550	10	4		40	500
		500		− 159	+ 321	
				162		

$$\bar{u} = \frac{162}{500} = 0{,}324 \qquad \bar{x} = 1\,150 + 100 \times 0{,}324 = \underline{1\,182{,}4}\text{ F}$$

Calcul de la médiane Me : Cherchons le salaire de l'effectif situé au 250ᵉ rang.

$$Me = 1\,100 + (1\,200 - 1\,100) \times \frac{250 - 131}{299 - 131} = \underline{1\,170{,}8}\ \text{F}$$

Calcul du mode de la série :

$$\bar{x} - Mo = 3\,(\bar{x} - Me) \Longrightarrow Mo = 3\,Me - 2\,\bar{x}.$$

$$Mo = 3 \times 1\,170{,}8 - 2 \times 1\,182{,}4 \quad \text{soit} \quad Mo = \underline{1\,147{,}6}\ \text{F}$$

EXERCICES

Médiane.

20. Étant donné une série à variation continue, montrer en utilisant la série du n° 29, que la droite ayant pour abscisse la médiane, partage l'histogramme suivant deux surfaces équivalentes.

21. Déterminer la médiane de chacune des distributions :

1, 4, 5, 5, 0, 8, 2.
18, 0, 8, 16, 10, 4, 4, 14, 2, 14.

22. On considère la série statistique suivante :

Classes	Effectifs
0 à 5	2
5 à 10	4
10 à 20	6
20 à 40	8

Déterminer la médiane de cette série

a) par le calcul.

b) graphiquement.

23. Décès en 1963 des personnes du sexe masculin suivant l'âge, en France.

Moins de 5 ans	5 à 19	20 à 39	40 à 59	60 à 69	70 et plus
12 711	3 512	13 024	52 646	65 665	136 051

Déterminer la médiane de la distribution par le calcul et par le graphique.

Médiane. Moyennes.

24. Étant donné n observations de valeur x_i, de moyenne arithmétique $\bar{x}$, calculer

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}).$$

25. Une série d'observations concernant les tailles d'un groupe d'adolescents de 11 à 14 ans a donné les résultats suivants :

Plus de 140 et au plus 144 cm	3
Plus de 144 et au plus 148 cm	17
Plus de 148 et au plus 152 cm	63
Plus de 152 et au plus 156 cm	82
Plus de 156 et au plus 160 cm	69
Plus de 160 et au plus 164 cm	31
Plus de 164 et au plus 168 cm	20
Plus de 168 et au plus 172 cm	4
Plus de 172 et au plus 174 cm	1
Plus de 174 et au plus 178 cm	1

1° Construire l'histogramme représentant la série. En déduire la classe dominante.
2° Déterminer la taille moyenne.

26. Les résultats du saut en hauteur au cours d'une séance de culture physique sont les suivants :

Hauteur *cm*	[90, 95[	[95, 100[	[100, 105[	[105, 110[	[110, 115[	[115, 120[	[120, 130[
Effectif	4	10	15	25	16	8	2

1° Construire l'histogramme et les courbes cumulatives croissantes et décroissantes.
2° Déterminer la classe modale et la médiane (calcul et méthode graphique).
3° Déterminer la hauteur moyenne du saut.

27. *Répartition des exploitations agricoles suivant la superficie (bois non compris).* Recensement de 1956.

Sources : ministère de l'Agriculture et I.N.S.E.E.

Superficie des exploitations	Nombre d'exploitations (Répartition en %)
Moins de 1 ha	6,6
1 ha à 1,99 ha	10,2
2 ha à 4,99 ha	18,2
5 ha à 9,99 ha	20,8
10 ha à 19,99 ha	23,5
20 ha à 49,99 ha	16,5
50 ha et plus	4,2
	100,0

1° Déterminer le mode de cette distribution.
2° Calculer la médiane (solution par le calcul et solution graphique).
3° Calculer la moyenne arithmétique.
4° Quelles conclusions peut-on tirer de la comparaison de ces trois paramètres de position ?

28. 17 copies d'examen notées de 0 à 20 ont donné les résultats suivants :

1, 2, 3, 3, 5, 7, 8, 8, 8, 10, 11, 12, 12, 13, 15, 16, 18

Calculer : la moyenne arithmétique; la moyenne géométrique; la moyenne harmonique. Écrire la relation entre ces trois moyennes.

29. Dans une usine, les salaires mensuels sont répartis en pourcentage et sous une forme simplifiée de la façon suivante :

Salaire	Hommes	Femmes
De 600 à 700 francs	30	45
De 700 à 800 francs	32	30
De 800 à 900 francs	24	19
De 900 à 1 000 francs	14	6

On demande :

1° La moyenne des salaires masculins : m;

2° La moyenne des salaires féminins : m';

3° La moyenne des salaires d'un ménage : M.

Pour résoudre cette dernière question, on démontrera que $M = m + m'$, de la façon suivante : étant donné une variable x pouvant prendre les valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 de moyenne m, et une variable y pouvant prendre les valeurs y_1, y_2, y_3, y_4 de moyenne m', montrer que la variable $z = x + y$ (x et y se combinant de toutes les façons possibles) a pour valeur moyenne $M = m + m'$.

Peut-on généraliser dans le cas où les variables x et y prendraient n valeurs.

(*Baccalauréat*).

30. On achète :

I

Une première fois pour 1 000 F d'escudos au cours de 10 F l'escudo.

Une seconde fois pour 1 000 F d'escudos au cours de 12,5 F l'escudo.

Montrer que le ***cours moyen pour l'ensemble des deux opérations*** est la moyenne harmonique des deux cours pratiqués.

II

Soient deux données positives x_1 et x_2 distinctes.

a) Classer, en justifiant ce classement, les moyennes arithmétiques (x), géométrique (G) et harmonique (h) de ces deux données.

b) Montrer que la moyenne géométrique des données est également la moyenne géométrique des deux autres moyennes considérées.

c) Établir que la moyenne harmonique h de x_1 et x_2 est également la moyenne harmonique des deux quantités $(h - x_1)$ et $(h - x_2)$.

Existe-t-il une propriété correspondante pour la moyenne arithmétique ?

(*Baccalauréat*).

INDICES DE DISPERSION

39. Généralités. — Les valeurs typiques d'une série (mode, médiane, moyenne) donnent une idée sommaire de la distribution des observations mais ne suffisent pas à la caractériser.

Considérons, par exemple, deux groupes de sept élèves d'une même classe qui obtiennent à un devoir les notes suivantes :

Groupe A :	9	10	10	11	12	12	13
Groupe B :	5	7	9	11	13	15	17

Ces deux séries ont même médiane et même moyenne arithmétique 11. Dans la première, les valeurs sont groupées autour de la valeur typique 11; dans la deuxième, elles sont plus étalées, plus *dispersées* de la valeur centrale. Nous disons que la distribution A a une *faible dispersion*, tandis que B a une *forte dispersion*.

40. Étendue d'une série ou intervalle de variation. — ***L'étendue d'une série est la différence entre ses deux valeurs extrêmes.***

Exemples.

Groupe A : étendue = 13 − 9 = 4 points.
Groupe B : étendue = 17 − 5 = 12 points.

Dans la série des tailles de 500 enfants (n° 17), l'étendue de la série est 175 − 150 = 25 cm.

On utilise aussi les expressions : *éventail* ou *range*.

L'étendue d'une série est facile à déterminer, mais elle ne caractérise pas convenablement la dispersion lorsque les valeurs extrêmes sont accidentelles.

41. Les quartiles. — La médiane sépare la série des observations en deux groupes d'effectifs égaux. Déterminons la médiane de chacune des deux moitiés. On obtient :

1° le *premier quartile* Q_1 qui définit la valeur Q_1 du caractère tel que le quart des observations soit inférieur à Q_1, les trois quarts supérieurs à Q_1.

2° le *second quartile* ou médiane M de la série.

3° le *troisième quartile* Q_3 qui définit la valeur Q_3 du caractère telle que le quart des observations soit supérieur à Q_3 et les trois quarts inférieurs à Q_3.

Ces définitions sont schématisées par la figure n° 19.

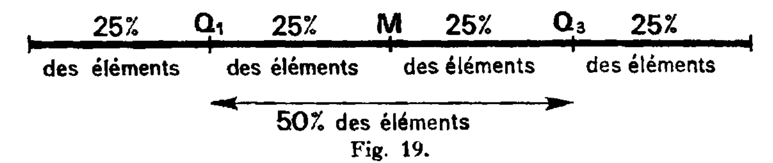


Fig. 19.

L'intervalle interquartile est la différence $Q_3 - Q_1$. Il caractérise la dispersion car *il contient la moitié* (50 %) *des effectifs.*

42. Exemple de détermination des quartiles. — Le calcul des quartiles, analogue au calcul de la médiane, s'obtient au moyen des séries cumulées. Considérons la répartition de 500 enfants d'après leur taille.

Tailles (*cm*)	Effectifs n_i	Effectifs cumulés
[150, 154[	25	25
[154, 158[	50	75
[158, 162[	200	275
[162, 166[	175	450
[166, 170]	50	500

Le quartile Q_1 est la taille qui correspond à la $500 \times \frac{25}{100} = 125^e$ observation, donc Q_1 appartient à la classe [158, 162[.

$$Q_1 = 158 + (162-158)\frac{125-75}{275-75} = 159 \text{ cm.}$$

Le quartile Q_3 est la taille qui correspond à la $500 \times \frac{75}{100} = 375^e$ observation. Q_3 appartient donc à la classe [162, 166[.

$$Q_3 = 162 + (166-162)\frac{375-275}{450-275} = 164{,}28 \text{ cm.}$$

L'intervalle interquartile est :

$$164{,}28 - 159 = 5{,}28 \text{ cm.}$$

Cette série, d'étendue 20 cm, contient 100 % des observations dont les 50 % se trouvent dans un intervalle d'amplitude 5,28 cm.

Remarque. — La courbe cumulative (fig. 20) permet de trouver graphiquement les résultats en traçant deux droites parallèles à Ox, d'ordonnées 125 et 375.

43. Déciles. — En généralisant la notion précédente de quartile, on définit les déciles qui, au nombre de 9, divisent la série en dix parties d'effectifs égaux.

Le $p^{ième}$ décile D_p d'une série, est la valeur du caractère tel que les $10\,p$ % des observations aient une valeur inférieure à D_p. Ainsi le premier décile D_1 est la valeur D_1 telle que 10 % des observations aient une valeur inférieure à D_1. De même, le neuvième décile D_9 est la valeur D_9, telle que 90 % des valeurs observées lui soient inférieures.

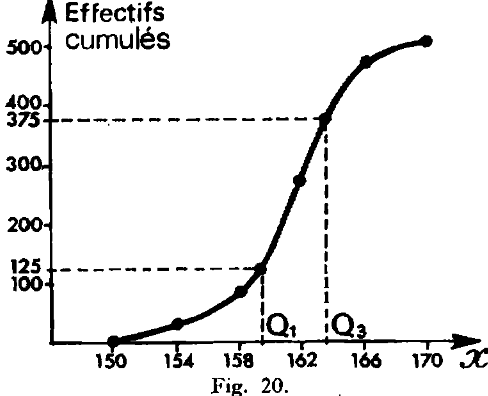


Fig. 20.

La différence $D_9 - D_1$ définit un intervalle contenant les 80 % des effectifs.

On définirait de la même façon des *centiles*, qui au nombre de 99, partageraient la série en 100 groupes d'effectifs égaux.

44. Écart absolu moyen.

1° On appelle *écart* d'une variable x_i par rapport au nombre a, la valeur absolue de leur différence, c'est-à-dire $|x_i - a|$.

2° ***On appelle écart absolu moyen d'un ensemble de données, la moyenne arithmétique des écarts de ces données par rapport à leur moyenne arithmétique.***

Si $\bar{x}$ est la moyenne arithmétique des n données $x_1, x_2, ..., x_i, ...x_n$, l'écart moyen est :

$$e = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$$

Exemple. — Si 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16 sont les notes hebdomadaires d'un élève, leur moyenne arithmétique est 12 et l'écart moyen a pour valeur :

$$e = \frac{1}{7}(4 + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + 4) = 2.$$

Cela signifie que les notes s'écartent en moyenne de 2 par rapport à leur moyenne.

3° Dans le cas d'observations groupées en classes, l'écart absolu moyen est défini par l'expression :

$$e = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{c} n_i\,|x_i - \bar{x}|$$

dans laquelle x_i est la valeur centrale de classe d'effectif n_i et c le nombre de classes.

Exemple. — Déterminer l'écart moyen de la série n° 42 sachant que la moyenne arithmétique est $\bar{x} = 161{,}4$ cm (n° 34).

Tailles	Centre de classes x_i	Effectifs n_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$n_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
[150, 154[	152	25	9,4	235
[154, 158[	156	50	5,4	270
[158, 162[	160	200	1,4	280
[162, 166[	164	175	2,6	455
[166, 170]	168	50	6,6	330
		500		1 570

$$e = \frac{1\,570}{500} = 3{,}14 \text{ cm}.$$

Les tailles de ces enfants s'écartent en moyenne de 3,14 cm de la taille moyenne de l'ensemble des effectifs.

Remarque. — Dans cette étude, nous avons défini l'écart moyen d'une série par rapport à la moyenne arithmétique. On pourrait le définir par rapport à une valeur typique, la médiane par exemple. D'ailleurs, dans les distributions courantes, la médiane et la moyenne arithmétique ont des valeurs très voisines.

45. Fluctuation ou variance. — ***La fluctuation d'un ensemble de dennées est la moyenne arithmétique des carrés des écarts de ces données par rapport à leur moyenne arithmétique.***

La fluctuation, désignée par σ^2, s'exprime par la formule :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

46. Écart-type ou écart quadratique moyen. — ***L'écart-type d'un ensemble de données est la racine carrée de leur fluctuation.***

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

L'unité de l'écart-type σ est celle du caractère de la série.

Dans le cas d'observations groupées en classes, la somme $\sum$ est étendue au nombre de classes et x_i représente la valeur centrale.

Exemple. — *Calcul direct de la fluctuation et de l'écart-type de la série n° 42, dans laquelle* $\bar{x} = 161{,}4$ *cm.*

Les calculs sont présentés dans le tableau suivant :

Tailles	Centre de classe x_i	Effectifs n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
150 à 154	152	25	− 9,4	88,36	2 209
154 à 158	156	50	− 5,4	29,16	1 458
158 à 162	160	200	− 1,4	1,96	392
162 à 166	164	175	2,6	6,76	1 183
166 à 170	168	50	6,6	43,56	2 178
		500			7 420

$$\sigma^2 = \frac{7\,420}{500} = 14{,}84 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\sigma \approx 3{,}8 \text{ cm}}$$

Remarque. — Les calculs se compliquent rapidement et deviennent erronés lorsque la moyenne arithmétique $\bar{x}$ n'est connue qu'avec une certaine approximation. Pour simplifier les calculs de l'écart-type on procède d'une façon analogue au calcul de la moyenne arithmétique (n° 35) en effectuant un changement d'origine.

47. — Simplification du calcul de l'écart-type : changement d'origine. — Choisissons une valeur arbitraire x_0 du caractère.

$$x_i - x_0 = (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - x_0).$$

Calculons l'expression

$$E = \sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - x_0)^2 = \sum n_i \, [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - x_0)]^2.$$

Développons :

$$E = \sum n_i(x_i - \bar{x})^2 + 2n_i(x_i - \bar{x})(\bar{x} - x_0) + n_i(\bar{x} - x_0)^2$$

$$E = \sum n_i(x_i - \bar{x})^2 + 2\sum n_i(x_i - \bar{x})(\bar{x} - x_0) + \sum n_i(\bar{x} - x_0)^2$$

Or, $\bar{x} - x_0$ et $(\bar{x} - x_0)^2$ sont des constantes que nous mettons en facteur,

$$E = \sum n_i(x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - x_0)\sum n_i(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - x_0)^2 \, n.$$

Comme $\sum n_i(x_i - \bar{x}) = \sum n_i x_i - \bar{x}\sum n_i = n\bar{x} - n\bar{x} = 0,$

il reste :

$$E = \sum n_i(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - x_0)^2$$

soit $$\sum n_i(x_i - \bar{x})^2 = \sum n_i(x_i - x_0)^2 - n(\bar{x} - x_0)^2. \qquad (1)$$

La fluctuation s'exprime donc par la formule :

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum n_i(x_i - x_0)^2 - (\bar{x} - x_0)^2}$$

Si $x_0 = 0$, $$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2}$$

EXEMPLE. — *Reprenons le calcul de l'écart-type de la série précédente en choisissant* $x_0 = 160$ *cm comme valeur arbitraire du caractère.*

Tailles	Centre de classe x_i	Effectifs n_i	$x_i - 160$	$(x_i - 160)^2$	$n_i(x_i - 160)^2$
150 à 154	152	25	− 8	64	1 600
154 à 158	156	50	− 4	16	800
158 à 162	160	200	0	0	0
162 à 166	164	175	4	16	2 800
166 à 170	168	50	8	64	3 200
		500			8 400

$$\sigma^2 = \frac{8\,400}{500} - (161{,}4 - 160)^2 = 16{,}8 - 1{,}96 = 14{,}84$$

$$\sigma \approx 3{,}8 \text{ cm.}$$

REMARQUE. — Le résultat (1) montre que

$$\sum n_i(x_i - \bar{x})^2 < \sum n_i(x_i - x_0)^2$$

autrement dit, l'expression $\sum n_i (x_i - x_0)^2$ est minimum si x_0 est la moyenne pondérée $\bar{x}$ des x_i.

48. Intérêt de l'écart-type. — Dans l'exemple précédent, déterminons les valeurs $\bar{x} \pm 2\sigma = 161{,}4 \pm 2 \times 3{,}8$ soit 153,8 cm et 169 cm. Un calcul très simple d'interpolation linéaire montre que l'intervalle [153,8; 169] couvre environ 92 % des effectifs de la série.

D'une façon générale, on démontre que l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$ contient, quelle que soit la série, les 75 % des observations. Une faible valeur de l'écart-type indique une accumulation des effectifs au voisinage de la moyenne, tandis qu'une grande valeur de σ est l'indice d'un étalement des observations.

49. Coefficient de variation. — Dans la comparaison de plusieurs séries statistiques, on utilise le coefficient de variation ou coefficient de dispersion qui représente le rapport de l'écart-type à la moyenne arithmétique :

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}.$$

c'est un coefficient sans dimension. Dans l'exemple précédent, le coefficient de variation est $\frac{3{,}8}{161{,}4} \approx 0{,}02$.

PROBLÈME RÉSOLU

Les séries statistiques se présentent souvent sous la forme du tableau ci-dessous, dont les valeurs centrales des classes forment une progression arithmétique.

Centres de classe	a	$a + b$	$a + 2b$	$\cdots$	$a + (n - 1)b$	Total
Effectifs	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n-1}	N

1° Vérifier que la valeur moyenne, $\bar{x}$, et le carré de l'écart-type, σ^2, de cette série, ont pour valeur

$$\bar{x} = a + \frac{b \sum iy_i}{N}, \qquad \sigma^2 = \frac{b^2}{N}\left[\sum i^2 y_i - \frac{\left(\sum iy_i\right)^2}{N}\right].$$

2° Calculer à l'aide de ces formules le salaire moyen et l'écart-type de la série donnant la répartition du personnel spécialisé d'une entreprise suivant les salaires journaliers :

Salaires	30 à 40	40 à 50	50 à 60	60 à 70	70 à 80	80 à 90	90 à 100
Effectifs	11	26	63	81	35	21	13

1° **Par définition** : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum y_i(a + ib) = \frac{1}{N}\sum y_i a + \frac{1}{N}\sum y_i ib.$

Or :
$$\sum y_i a = a\sum y_i = aN$$

et :
$$\sum y_i ib = b\sum y_i i.$$

Donc :
$$\bar{x} = a + \frac{b}{N}\sum iy_i.$$

Pour le calcul de la fluctuation, utilisons la forme :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum (x_i - x_0)^2 n_i - (\bar{x} - x_0)^2$$

dans laquelle $x_0 = a,\ ,\ n_i = y_i.$ **Il vient :**

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum (a + ib - a)^2 y_i - \left(a + \frac{b}{N}\sum iy_i - a\right)^2$$

soit :

$$\sigma^2 = \frac{b^2}{N}\sum i^2 y_i - \frac{b^2}{N^2}\left(\sum iy_i\right)^2 \quad \text{ou} \quad \sigma^2 = \frac{b^2}{N}\left[\sum i^2 y_i - \frac{\left(\sum iy_i\right)^2}{N}\right].$$

2° **Les calculs sont résumés dans le tableau qui suit. On pose :**

$$a = 35 \qquad b = 10.$$

Nº de la classe i	Centre de classe	Effectif y_i	iy_i	i^2y_i
0	35	11	0	0
1	45	26	26	26
2	55	63	126	252
3	65	81	243	729
4	75	35	140	560
5	85	21	105	525
6	95	13	78	468
		250	718	2 560

$\bar{x} = 35 + 10 \times \frac{718}{250} = 63{,}72F$

$\sigma^2 = \frac{100}{250}\left[2\,560 - \frac{(718)^2}{250}\right] = 199{,}16$

$\sigma \approx 14{,}1F.$

EXERCICES

Range. Quartiles et Déciles.

31. Déterminer l'étendue des séries statistiques :

a) 8, 15, 5, 13, 1, 27, 38.

b) a, $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, b, b^2 si $1 < a < b$.

32. Déterminer les quartiles des séries statistiques :

a) 7, 10, 22, 2, 0, 8, 13, 12, 20, 18, 21.

b) 2, 5, 0, 4, 6, 5, 9, 8, 11, 8.

33. Répartition de salariés d'après le salaire touché en 1961 (Source : I.N.S.E.E.).

Salaires milliers F	0 à 2	2 à 3	3 à 4	4 à 5	5 à 6	6 à 8	8 à 10	10 à 15	15 à 20	20 à 35	35 à 50	50 à 70
Effectifs milliers	188	216	654	855	973	1 673	975	869	250	209	56	35

Déterminer les quartiles.

Écart absolu.

34. Déterminer l'écart absolu moyen (ou écart arithmétique) des notes d'un élève :
9, 7, 10, 12, 18, 16.

35. Déterminer l'écart absolu moyen par rapport à la médiane, de la série :
5, 12, 3, 15, 11, 11, 8.

36. Déterminer, en utilisant la formule de définition, l'écart-type de la distribution

6, 18, — 24, 8, 24, — 14, 4, 12, 6, 20, — 16.

37. Écart-type : formule développée. Étant donné une série de n observations de valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, on désigne par $\bar{x}$ leur moyenne arithmétique.

1° Démontrer que :
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

2° Déduire que l'écart-type de la série est :
$$\sigma = \left[\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Cette formule est dite formule développée qui se prête plus aisément au calcul que la formule de définition.

3° Déterminer, en utilisant la formule développée, l'écart-type de la distribution

6, 18, — 24, 8, 24, — 14, 4, 12, — 26, 6, 20.

38. Écart-type : formule dans le cas d'observations groupées en classes. — On considère une série d'observations groupées en classes de valeurs centrales $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ayant pour effectifs correspondants $n_1, n_2, \ldots, n_p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$. La valeur moyenne est $\bar{x}$.

1° Démontrer que :
$$\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

2° Déduire que l'écart-type est
$$\sigma = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \bar{x}^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

3° Déterminer, en utilisant la formule de définition et la formule développée, l'écart-type de la série :

Classes	0 à 10	10 à 20	20 à 30	30 à 40
Effectifs	4	8	12	16

39. Écart-type : changement de variable. — On considère une série de n observations, de valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$ de moyenne arithmétique $\bar{x}$. On pose :

$x_i = x_0 + k\,X_i$ où x_0 et k sont des constantes.

1° Démontrer la formule $\bar{x} = x_0 + k\bar{X}$, où $\bar{X}$ est la moyenne arithmétique des X_i.

2° Démontrer que :
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0)^2 = \frac{k^2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

3° Si on désigne par σ_x la fluctuation de la série des x_i et σ_X la fluctuation de la série des X_i, démontrer que $\sigma_X = k\sigma_x$.

4° *Application* : Répartition des salariés d'une entreprise suivant leur âge.

Age	20 à 25	25 à 30	30 à 35	35 à 40	40 à 45	45 à 50	50 à 55	55 à 60
Effectif	16	53	80	85	35	16	7	8

On pourra poser $x_0 = 37{,}5$ et $k = 5$.

40. Le classement de certaines catégories des personnels de deux entreprises A et B, effectué d'après le montant des salaires horaires, est indiqué dans le tableau ci-dessous.

1° Calculer, pour chacun de ces groupes :

a) la médiane et donner sa signification;

b) la moyenne et donner sa signification;

c) l'écart quadratique moyen (écart-type).

2° Quelles réflexions vous inspire la comparaison des résultats obtenus :

a) pour les valeurs centrales (valeurs typiques);

b) pour la dispersion ?

3° Expliquer en quoi le développement du machinisme peut amener une modification de la répartition des salaires dans une entreprise.

Salaires F	3 à 3,30	3,30 à 3,60	3,60 à 3,90	3,90 à 4,20	4,20 à 4,50	4,50 à 4,80	4,80 à 5,10	5,10 à 5,40	5,40 à 5,70	5,70 à 6
Entreprise A	95	184	265	235	182	166	84	73	47	18
Entreprise B	54	126	214	387	476	624	581	419	154	66

41. Une entreprise qui exploite un parc de taxis a relevé, pour 100 d'entre eux, les distances qu'ils avaient parcourues au moment de leur mise à la réforme.

Distances parcourues (*en milliers de km*)	Nombre de taxis
80 — 85	5
85 — 90	9
90 — 95	14
95 — 100	18
100 — 105	25
105 — 110	16
110 — 115	7
115 — 120	6

1° Indiquer la distance médiane.
2° Calculer la distance moyenne.
3° Calculer l'écart-type.
4° Indiquer la signification de ces trois résultats.

42. On a pesé individuellement 1 000 cigarettes consécutives à la sortie d'une machine à cigarettes (environ 30 secondes de fabrication). Les poids individuels ont été répartis dans les classes d'étendue 2 centigrammes.

Ex. : classe 8 : $1{,}18 \leqslant x_8 < 1{,}20$.

Numéros des classes	Limites des classes	Nombre de cigarettes
	grammes	
1	De 1,04 à 1,06	17
2	De 1,06 à 1,08	15
3	De 1,08 à 1,10	27
4	De 1,10 à 1,12	47
5	De 1,12 à 1,14	63
6	De 1,14 à 1,16	85
7	De 1,16 à 1,18	117
8	De 1,18 à 1,20	129
9	De 1,20 à 1,22	126
10	De 1,22 à 1,24	112
11	De 1,24 à 1,26	88
12	De 1,26 à 1,28	69
13	De 1,28 à 1,30	42
14	De 1,30 à 1,32	31
15	De 1,32 à 1,34	16
16	De 1,34 à 1,36	16
	Total	1 000

1° *a*) Établir la relation qui donne la moyenne arithmétique $\bar{x}$ des poids des cigarettes en fonction d'une moyenne provisoire x_0 (choisie parmi les centres de classes), de l'intervalle de classe k constant et de la moyenne $\overline{U}$ des déviations des centres des classes de la série par rapport à x_0, l'intervalle de classe k étant pris comme unité $\left(\text{on posera } U_i = \dfrac{x_i - x_0}{k}\right)$.

b) Appliquer cette relation au calcul du poids moyen des cigarettes.

2° *a*) Établir de même la formule qui donne l'expression de la variance de la série.

b) Appliquer cette formule au calcul de l'écart-type.

c) Donner la valeur du coefficient de variation.

43. Étant donné la série statistique suivante :

Répartition de la population salariée suivant la distance du lieu de travail

Distance en km	A domicile	De 0 à 1	De 1 à 2	De 2 à 5	De 5 à 10	De 10 à 20	De 20 à 50	Total
Nombre d'ouvriers	29	324	159	255	147	59	27	1 000

établir la relation $$\sum (x - \bar{x})^2 = \sum (x - a)^2 - n(a - \bar{x})^2$$

x = terme quelconque de la série; a = nombre quelconque; n = nombre de termes.

Calculer l'écart-type σ de cette série en appliquant cette formule. On donnera à a la valeur pouvant réduire au maximum les calculs.

(*Baccalauréat*)

INDICES STATISTIQUES

INDICES SIMPLES

50. Généralités. — Afin de mieux comprendre et mieux schématiser des expressions telles que « production », « niveau de vie », « niveau des prix »... etc., nous allons définir ***des nombres indices.*** Ils permettent de mieux suivre l'évolution des phénomènes économiques et financiers, de préciser leur état actuel et de prévoir leur tendance.

51. Indice simple. — Comparons le prix du litre d'essence-auto :

en 1956............................0,76 F
en 1966............................0,97 F

Choisissons comme référence de prix l'année 1956, considérée comme *année de base.* Le prix en 1966 est caractérisé par le rapport :

$$\frac{0{,}97}{0{,}76} = 1{,}289.$$

A seule fin d'éviter de trop nombreuses décimales, on multiplie ce résultat par 100. Le nombre 128,9 représente *l'indice* du prix de vente du litre d'essence-auto en 1966, en prenant pour base 100 le prix en 1956. Cela veut dire que l'augmentation du prix d'essence par rapport à 1956 est 28,9 %.

On appelle indice pour une variable, le produit par 100 du rapport de ses valeurs, à deux époques différentes dont une est choisie pour base.

Exemples. — 1° *Indice des prix.*

En généralisant l'exemple précédent, si P_1 est le prix d'un article à une époque déterminée notée 1 et P_0 le prix du même article à *l'époque de référence,* que nous appelons 0, l'indice du prix de l'article noté $I_{(1,0)}$ est :

$$I_{(1,0)} = 100 \times \frac{P_1}{P_0}$$

2° *Indice de production.* — La production française de minerai d'uranium évaluée en tonnes est :

en 1959........................ 804 tonnes
en 1963........................ 1 072 tonnes

L'indice de production de minerai d'uranium pour 1963 en prenant 1959 pour année de référence est :

$$100 \times \frac{1\,072}{804} = 133,3.$$

52. Propriétés des indices simples : réversibilité et transférabilité.

1° $I_{(1,0)}$ est l'indice d'un produit à l'époque 1 par rapport à l'époque 0 :

$$I_{(1,0)} = 100 \times \frac{G_1}{G_0}$$

où G_1 et G_0 représentent les valeurs du produit aux époques correspondantes. L'indice de ce produit à l'époque 0, par rapport à l'époque 1 est :

$$I_{(0,1)} = 100 \times \frac{G_0}{G_1}.$$

On déduit :

$$I_{(1,0)} = 100 : \frac{I_{(0,1)}}{100} = 10^4 \times \frac{1}{I_{(0,1)}}.$$

On dit que *l'indice simple est réversible.*

2° Avec des notations analogues, considérons les indices $I_{(2,0)}$, $I_{(2,1)}$, $I_{(1,0)}$ d'un produit suivant les différentes époques 0, 1, 2 :

$$I_{(2,0)} = 100 \times \frac{G_2}{G_0} \qquad I_{(2,1)} = 100 \times \frac{G_2}{G_1} \qquad I_{(1,0)} = 100 \times \frac{G_1}{G_0}$$

$$I_{(2,0)} = 100 \times \frac{G_2}{G_1} \times \frac{G_1}{G_0} = I_{(2,1)} \times \frac{1}{100} I_{(1,0)}.$$

Donc :

$$\boxed{I_{(2,0)} = \frac{1}{100} I_{(2,1)} \cdot I_{(1,0)}}$$

On dit que l'*indice simple est transférable.*

EXEMPLE. — Considérons les salaires horaires moyens d'un ouvrier dans l'industrie de la construction électrique (année de base 1949).

Année	Époque	Salaire horaire en F	Indice horaire
1949	0	1,007	100
1956	1	2,203	218,1
1960	2	2,91	288,1
1963	3	3,66	361,6

Ce tableau permet de calculer les indices horaires en prenant 1960 comme année de base.

— soit directement : $I_{(3,2)} = 100 \times \frac{3,66}{2,91} = 125$

— soit en utilisant la transférabilité et la réversibilité des indices :

$$I_{(3,2)} = \frac{1}{100} I_{(3,0)} \cdot I_{(0,2)} = \frac{1}{100} I_{(3,0)} \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{I_{(2,0)}} = 100 \frac{I_{(3,0)}}{I_{(2,0)}}$$

$$I_{(3,2)} = 100 \times \frac{361,6}{288,1} = 125.$$

INDICES SYNTHÉTIQUES

53. Définition. — Le calcul de l'indice du prix d'une denrée ne suffit pas, par exemple, à déterminer l'évolution de l'ensemble des produits alimentaires. Aussi, détermine-t-on, à partir d'un ensemble d'indices simples, un *indice synthétique*, qui doit retracer l'importance de la variation d'un phénomène complexe.

54. Confection d'un indice synthétique. — L'exemple suivant donnera une idée du calcul d'un indice synthétique.

Considérons la consommation quotidienne de quatre articles (pain, viande, vin, beurre), d'une famille de trois personnes. Les prix moyens et les quantités consommées de chaque denrée aux époques 0 et 1, sont mentionnés dans le tableau :

	Pain *kg*	Viande *kg*	Vin *litre*	Beurre *kg*
Époque 0	0,70 F	10 F	1,20 F	9 F
Époque 1	0,80 F	12 F	1,40 F	10 F
Consommation	1,200 *kg*	0,5 *kg*	1 *l*	0,2 *kg*

La dépense quotidienne s'évalue :

— pour l'époque 0 à :

$D_0 = 0,70 \times 1,2 + 10 \times 0,5 + 1,20 + 9 \times 0,2 = 8,84$ F.

— pour l'époque 1 à :

$D_1 = 0,80 \times 1,2 + 12 \times 0,5 + 1,40 + 10 \times 0,2 = 10,36$ F.

En prenant l'époque 0 pour période de base, l'indice des quatre articles de consommation est, à l'époque 1 :

$$100 \times \frac{10,36}{8,84} = 117,1.$$

55. Expression générale. — D'une façon générale, posons :

P_0^i le prix unitaire de la denrée d'ordre i à l'époque 0.

P_1^i le prix unitaire de la denrée d'ordre i à l'époque 1.

Q^i le nombre d'unités de la $i^{ème}$ denrée consommée dans l'unité de temps (jour, semaine, année) à chaque époque.

$$I_{(1,0)} = 100 \times \frac{\text{somme des dépenses journalières à l'époque 1}}{\text{somme des dépenses journalières à l'époque 0}}$$

soit :

$$I_{(1,0)} = 100 \frac{\sum_{i=1} P_1^i Q^i}{\sum_{i=1} P_0^i Q^i} \tag{1}$$

REMARQUE. — Posons $P_1^i = P_0^i \times \frac{P_1^i}{P_0^i}$ et $P_0^i Q^i = d_0^i$

La formule (1) devient :

$$I_{(1,0)} = \frac{\sum 100 \frac{P_1^i}{P_0^i} P_0^i Q^i}{\sum d_0^i}.$$

En désignant par I_i l'indice de la $i^{ième}$ denrée :

$$I_i = 100 \frac{P_1^i}{P_0^i}$$

il vient :

$$I_{(1,0)} = \frac{\sum d_0^i I_i}{\sum d_0^i}.$$

Cette expression est une moyenne pondérée d'indices simples I_i, les coefficients de pondération étant les dépenses journalières d_0^i de chaque denrée à l'époque 0.

56. Autres méthodes de calcul des indices de prix. — Dans les calculs précédents, nous avons utilisé la pondération à l'époque 0. Si les quantités consommées aux époques 0 et 1 sont différentes, deux méthodes de calcul sont utilisées :

1° *Méthode Laspeyres :* cette méthode appliquée au n° 55 tient compte des pondérations à l'époque 0, notées Q_0^i pour les marchandises d'ordre i.

$$I_{(1,0)} = 100 \frac{\sum P_1^i Q_0^i}{\sum P_0^i Q_0^i}. \tag{2}$$

2° *Méthode Paasche :* elle tient compte des pondérations à l'époque 1, notées Q_1 pour les marchandises d'ordre i.

$$I_{(1,0)} = 100 \frac{\sum P_1^i Q_1^i}{\sum P_0^i Q_1^i}. \tag{3}$$

REMARQUES. — Pour ne tenir compte que des variations de prix, on notera que les mêmes quantités Q_0^i ou Q_1^i figurent au numérateur et au dénominateur de l'indice $I_{(1,0)}$ dans les formules 2 et 3.

Simplification des notations : On pourra dans l'écriture des formules supprimer la lettre *i*. Elles deviennent :

Formule de Laspeyres

$$I_{(1,0)} = 100 \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0}$$

Formule de Paasche

$$I_{(1,0)} = 100 \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1}$$

Formule de Sauerbeck : Si les quantités consommées ne sont pas connues, on calcule l'indice par la formule de Sauerbeck, en calculant la moyenne arithmétique des *n* rapports des prix.

$$I_{(1,0)} = 100 \frac{\sum P_1/P_0}{n}$$

INDICES USUELS

57. L'indice des 259 articles (*base 100 en 1962*). — C'est l'indice national des prix à la consommation des familles de condition modeste. Il permet de mesurer l'évolution de l'ensemble des prix des biens de consommation des ménages (célibataires exclus) dont le chef est ouvrier, employé ou personnel de service. Pour l'établir, 259 articles de consommation ont été choisis de façon à traduire le plus fidèlement possible les dépenses d'un ménage. Ces 259 articles sont divisés en 6 groupes, affectés d'une pondération, suivant le tableau de la page suivante.

REMARQUE. — L'indice national des 259 articles (*base 100 en 1962*) succède à l'indice des 250 articles (base 100 pour la période du 1er juillet 1956 au 30 juin 1957) qui a cessé d'être calculé le 31 décembre 1963.

Indications relatives à l'évolution de l'indice des 259 articles.

Dates	1962	1964	1965	Février 1966	Mars 1966	Avril 1966
Indice	100	108,4	111,2	112,9	113,1	113,5

Groupes	Nombre d'articles		Pondération	
I. *Aliments et boissons.*	**100**		**450**	
1° Produits à base de farine		6		39
2° Viandes et poissons		27		143
3° Œufs, lait, corps gras		16		76
4° Fruits et légumes		29		70
5° Épicerie		16		39
6° Boissons		5		60
7° Repas pris à l'extérieur		1		23
II. *Habitation*	**45**		**185**	
1° Logement		7		71
2° Chauffage et éclairage		5		51
3° Équipement		33		63
III. *Hygiène et soins*	**34**		**86**	
1° Produits d'entretien		8		14
2° Articles de toilette		7		8
3° Mercerie		2		2
4° Services divers		11		24
IV. *Transports*	**14**		**65**	
1° Transports publics		6		19
2° Transports individuels		8		46
V. *Habillement, linge*	**39**		**133**	
1° Vêtements		12		62
2° Lingerie, bonneterie		21		52
3° Chaussures		6		19
VI. *Distractions, divers*	**27**		**81**	
1° Spectacles		2		5
2° Lecture et distractions.		14		41
3° Tabac		2		22
4° Divers		9		13
	259		**1000**	

58. Raccordement à l'ancien indice. — On peut prolonger au-delà de 1963 les indices interrompus à cette date en utilisant un *coefficient de raccordement* qui permet de déterminer l'indice correspondant dans l'ancienne base, connaissant l'indice dans la nouvelle base. Ainsi le coefficient de raccordement pour l'année 1963 est 1,428.

Exemple. — En mai 1963, $I_{(1963.\,1962)} = 104$. L'indice qui correspond à la base 100 en 1956 est :

$$I_{(1963.\,1956)} = 104 \times 1{,}428 = 148{,}5.$$

59. Autres indices. — Pour étudier l'évolution de la production industrielle, le volume des exportations, des importations, etc., on détermine un *indice de quantité* (ou de volume) correspondant à une époque déterminée par rapport à une époque de base. On

définit des indices simples (n° 51) et un indice synthétique portant sur des quantités *pondérées par leur prix.*

En adoptant les simplifications des notations (n° 56 : suppression de la lettre i), Q_1 et Q_0 représentent les quantités aux périodes 1 et 0 des différentes marchandises en mouvement et leurs prix aux époques correspondantes sont P_1, P_0. Comme au n° 56, on définit deux indices :

Formule de Laspeyres	*Formule de Paasche*
$I_{(1,0)} = \dfrac{\sum Q_1 P_0}{\sum Q_0 P_0}$	$I_{(1,0)} = \dfrac{\sum Q_1 P_1}{\sum Q_0 P_1}$

Citons entre autres,

— l'indice de la production industrielle (base 100 en 1959),

— l'indice général des prix de gros (base 100 en 1949) comprenant trois groupes principaux :

Produits alimentaires de pondération 4 000;
Combustibles et énergie de pondération 1 500;
Produits industriels de pondération 4 500.

60. Documentation. — L'institut National de la Statistique et des Études économiques (I.N.S.E.E.), sis au n° 29 quai Branly, Paris 7ᵉ, centralise tous les renseignements nécessaires au calcul des indices et fait connaître les résultats de ses travaux dans *l'Annuaire des Statistiques* et dans de nombreuses publications : ***Bulletin hebdomadaire, Bulletin mensuel de Statistique, Études statistiques, Bulletins régionaux de Statistique,*** etc.

PROBLÈME RÉSOLU

Le tableau ci-dessous fournit les indices élémentaires des produits qui entrent dans la composition du calcul de l'indice national des prix de détail (259 articles : base 100 en 1962) au mois de mars 1966.

Produits	Indice	Pondération
Aliments — Boissons	113,6	45
Habitation	117,3	185
Hygiène et soins	115,9	86
Transports	108,1	65
Habillement — Linge	109,0	133
Distractions et divers	109,0	81
		1 000

1° Calculer l'indice général des prix de détail en mars 1966.

2° Si cet indice était réversible, quel serait l'indice des prix en 1962, en prenant pour base mars 1966.

3° En supposant l'indice transférable et réversible, quel serait l'indice des prix en mars 1966 (base août 1965) sachant que l'indice des prix de détail en août 1965 est 111,2 (base 1962).

1° L'indice général des prix de détail en mars 1966 s'obtient en effectuant la moyenne pondérée des indices élémentaires soit :

$$I_{(mars 66)} = \frac{1}{1000}[(113,6\times 45)+(117,3\times 185)+(115,9\times 86)+(108,1\times 65)+(109\times 133)+(109\times 81)]$$

$$I \approx 113,1.$$

2° Si l'indice synthétique était réversible, on aurait :

$$\text{Indice de 1962} = \frac{10\,000}{113,1} \approx 89,8.$$

3° Si l'indice synthétique était transférable, on aurait :

$$I_{(1966,\ \text{août } 1965)} = \frac{1}{100} \times \text{I}(1966,\ 1962) \times \text{I}(1962,\ \text{août } 1965)$$

or $$I_{(1962,\ \text{août } 1965)} = \frac{10\,000}{111,2} \approx 89,9 \text{ si l'indice était réversible.}$$

Donc : $$I_{(\text{mars } 1966,\ \text{août } 1965)} = \frac{1}{100} \times 113,1 \times 89,9 = 101,7.$$

EXERCICES

Indices simples.

44. La population de la France a évolué comme suit au 1er janvier de 1861 à 1962.

Années	1861	1901	1911	1921	1936	1946	1954	1962
Population (*milliers*)	37 386	40 681	41 476	39 210	41 907	40 503	42 777	46 243

Calculer l'indice de cette population suivant les différentes années en prenant la base 100 en 1936.

45. Les salaires horaires des ouvriers dans l'industrie de la construction métallique de la région parisienne a évolué comme suit de 1949 à 1963 :

1949	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
1,007	2,361	2,564	2,684	2,91	3,16	3,46	3,66

1° Calculer l'indice horaire suivant les différentes années en prenant la base 100 en 1949.

2° Que deviennent les indices précédents en choisissant 1960 comme année de base?

Moyenne des indices simples.

46. En utilisant les résultats du tableau :

Époque	Viande (*kg*)	Vin (*litre*)	Poisson (1/2 *kg*)	Beurre (250 *g*)
1	5 F	1 F	5 F	2,2 F
2	8 F	1,2 F	5 F	2,5 F
3	12 F	1,5 F	6 F	3 F

1° Déterminer les indices simples de chaque denrée aux époques 2 et 3 en choisissant pour base l'époque 1.

2° En prenant pour chaque époque la moyenne arithmétique des indices partiels trouvés, calculer l'indice arithmétique qui concrétise l'évolution globale de ces biens commerciaux.

Indication : cette méthode est analogue à celle utilisée de la remarque n° 55 ou $d_0^i = 1$. (On n'envisage pas de pondération).

Formules de Laspeyres. Formule de Paasche.

47. Étant donné les éléments suivant relatifs à trois produits *A*, *B*, *C*.

Produits	Époque 1 (base)		Époque 2	
	P_1^i	Q_1^i	P_2^i	Q_2^i
A	12	10	13	11
B	5	14	4	13
C	8	20	9	18

1° Calculer par la formule de Laspeyres les indices correspondant aux prix et aux quantités pour les produits A, B, C.

2° Même question en utilisant la formule de Paasche.

3° Calculer *l'indice des valeurs globales* $I_{(2,1)} = \dfrac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_0}$ pour chaque produit.

48. A l'aide des données suivantes, calculer l'indice général des prix à la consommation (259 articles) à l'époque 1 dont les indices simples sont définis par le tableau suivant :

Produits	Indice simple	Pondération
Aliments, boissons	105	450
Habitation	108	185
Hygiène, soins	106	86
Transports	120	65
Habillement	107	133
Distractions, divers	104	81

Quel serait l'indice général des prix à l'époque 0, en supposant l'indice réversible (époque de base = époque 1)?

49. Déterminer l'indice des prix des produits manufacturés à la consommation familiale en province en 1954, base 100 en 1949, à l'aide des indices trimestriels suivants : (*Source* : I.N.S.E.E.).

Articles	Pondération	Mars 1954	Juin 1954	Sep. 1954	Déc. 1954
Cuisine, chauffage, ménage	2	141,9	141,4	141,3	141,0
Mobilier et literie	2	153,0	152,8	152,7	152,6
Produits d'entretien, toilette	2	121,9	121,9	121,7	121,7
Outillage, électricité, sport	2	143,0	142,8	142,8	143,0
Lingerie, bonneterie, mercerie	4	111,4	111,2	110,9	110,6
Habillement	6	128,0	127,8	128,6	128,5
Chaussures	2	119,0	118,6	117,4	117,0

L'indice d'ensemble à calculer est la moyenne arithmétique pondérée des indices annuels des groupes d'articles. Ces derniers sont les moyennes arithmétiques simples des quatre indices trimestriels.

Sachant que cet indice était 136,5 en 1952, base 100 en 1949, déterminer au moyen d'une formule simple l'indice en 1954, base 100 en 1952.

(*Baccalauréat*).

AJUSTEMENT LINÉAIRE

61. Généralités. — Les observations d'une série statistique à caractère discret se représentent graphiquement suivant un ensemble de points isolés. La jonction de ces points par des segments de droite, définit une ligne brisée qui ne traduit pas généralement la tendance essentielle du phénomène étudié. Le statisticien procédera à *l'ajustement* de cette ligne : il s'efforcera de la remplacer par une courbe régulière qui, dans l'ensemble, s'écartera le moins des points observés.

Si les points se répartissent approximativement suivant une droite (fig. 21), le problème *d'ajustement linéaire consiste à la détermination de cette droite*, qui peut être définie suivant les méthodes graphiques (nº 62), mécanique (nº 63), analytique (nº 64).

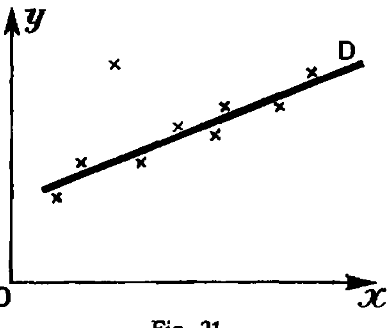


Fig. 21.

62. Ajustement linéaire graphique. — C'est un procédé manuel qui consiste à tracer une droite D (fig. 21) à travers un semis de points expérimentaux. On peut opérer en faisant glisser sur le graphique une droite, préalablement tracée sur une feuille de papier transparent. On cherche la meilleure position de D de manière que l'ensemble des points se répartisse régulièrement, de part et d'autre de D.

Exemple. — *Déterminer la droite d'ajustement des résultats de l'enquête suivante :*

Variable x	0	1	2	3	4	5	6
Valeurs y	4,25	3	3	1,75	1,5	0,5	0,25

Remarquons que la droite d'ajustement tracée dans le repère xOy passe par les points A (0, 4) et B $\left(\frac{9}{2}, 1\right)$ (fig. 22).

Le coefficient angulaire de la droite AB est :

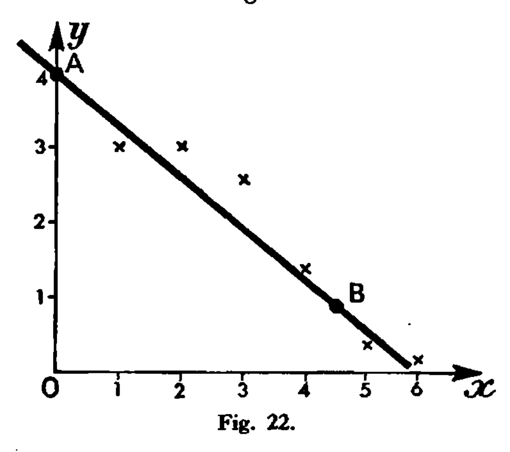


Fig. 22.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 4}{\frac{9}{2} - 0} = -\frac{2}{3}.$$

L'équation de AB s'écrit :

$$y - y_A = m(x - x_A) \text{ soit } y - 4 = -\frac{2}{3}x.$$

La droite d'ajustement admet pour équation :

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}x + 4}$$

Cette méthode fournit un résultat approximatif qui dépend du choix de la droite tracée par l'opérateur.

63. Méthodes des moyennes discontinues. — Reprenons l'exemple précédent dans lequel les sept points sont susceptibles d'un ajustement linéaire. Si chacun des points de coordonnées (x_i, y_i) se trouvait sur la droite D, d'équation $y = ax + b$, où a et b sont les paramètres à déterminer, l'expression

$$y_i = ax_i + b$$

serait vérifiée pour tout $i = (0, 1, 2, ..., 6)$.

Or les 7 équations aux inconnues a et b :

$$ax_i + b = y_i \qquad i = (0, 1, 2, ..., 6)$$

sont incompatibles car les points ne sont pas alignés.

On obtient a et b, à partir de deux équations (E) et (E') obtenues en ajoutant les trois premières, puis les quatre suivantes :

$$\begin{array}{rl} 4{,}25 &= 0a + b \\ 3 &= a + b \\ 3 &= 2a + b \\ \hline (E) \quad 10{,}25 &= 3a + 3b \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 1{,}75 &= 3a + b \\ 1{,}5 &= 4a + b \\ 0{,}5 &= 5a + b \\ 0{,}25 &= 6a + b \\ \hline (E') \quad 4 &= 18a + 4b \end{array}$$

En divisant respectivement chacune des équations par 3 et 4, on obtient le système S :

$$S \begin{cases} a + b = \dfrac{10{,}25}{3} \\ \dfrac{9a}{2} + b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} a = -0{,}69 \\ b = 4{,}10 \end{array}$$

La droite ajustée aux données a pour équation :

$$\boxed{y = -0{,}69x + 4{,}10}$$

Elle est comparable à celle trouvée par la méthode graphique.

REMARQUES. — 1° Cette méthode consiste à écrire que la droite d'ajustement passe par les *points moyens* des deux groupes de points formés par les trois premiers et les quatre suivants. En effet, le système (S) montre que la droite contient :

— le point $\left(1, \frac{10{,}25}{3}\right)$ dont les coordonnées sont les moyennes des coordonnées des points (0; 4,25); (1,3); (2,3).

— le point $\left(\frac{9}{2}, 1\right)$ dont les coordonnées sont les moyennes des coordonnées des quatre derniers points.

Toute autre collection de points conduirait à une droite différente.

2° On généraliserait l'étude précédente au cas de n observations en les groupant en deux sous-ensembles, dont le nombre d'éléments diffèrent au maximum d'une unité.

MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

64. Exposé de la méthode. — Considérons un ensemble de n points $A_i\,(x_i, y_i)$ susceptibles d'un ajustement linéaire par la droite D d'équation $y = ax + b$.

Calculons l'écart e_i du point A_i, mesuré par $\overline{P_iA_i}$ (fig. 23).

$$\overline{P_iA_i} = \overline{HA_i} - \overline{HP_i}$$
$$e_i = y_i - (ax_i + b).$$

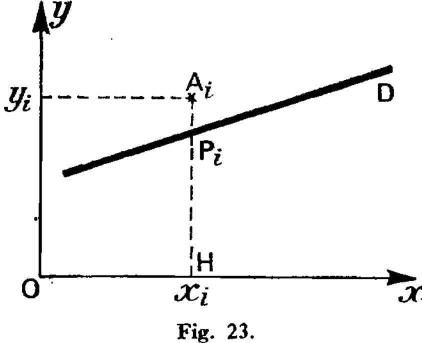


Fig. 23.

Le problème consiste à déterminer la droite D (c'est-à-dire à calculer a et b), pour laquelle la *somme des carrés des écarts des différents points soit minimum.*

Calculons : $\quad A = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$

$$A = \sum [y_i - (ax_i + b)]^2 = \sum y_i^2 - 2\sum y_i(ax_i + b) + \sum (ax_i + b)^2$$

Développons :

$$A = \sum y_i^2 - 2a\sum x_iy_i - 2b\sum y_i + a^2\sum x_i^2 + 2ab\sum x_i + nb^2.$$

Considérons cette expression comme un trinôme du second degré en a,

$$(1) \qquad a^2\sum x_i^2 - 2a\left[\sum x_iy_i - b\sum x_i\right] + \sum y_i^2 - 2b\sum y_i + nb^2$$

ou en b :

$$(2) \qquad nb^2 - 2b\left[\sum y_i - a\sum x_i\right] + \sum y_i^2 - 2a\sum x_iy_i + a^2\sum x_i^2$$

Or un trinôme du 2e degré $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ est minimum si

$$\alpha > 0 \quad \text{et} \quad \alpha x + \beta = 0.$$

Écrivons les deux conditions exprimant que les trinômes écrits sous les formes (1) et (2) admettent un minimum (α étant positif dans chacun des cas) :

$$(3) \qquad a \sum x_i^2 - \sum x_i y_i + b \sum x_i = 0$$

$$(4) \qquad nb - \sum y_i + a \sum x_i = 0.$$

Ordonnons ce dernier système d'équations linéaires aux inconnues a et b.

$$\left(\sum x_i^2\right) a + \left(\sum x_i\right) b = \sum x_i y_i$$

$$\left(\sum x_i\right) a + nb = \sum y_i$$

Ces équations, appelées *équations normales*, se simplifient en utilisant les valeurs moyennes des coordonnées :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$$

Elles deviennent :

$$(5) \qquad \left(\sum x_i^2\right) a + n\bar{x}b = \sum x_i y_i$$

$$(6) \qquad \bar{x}\, a + b = \bar{y}.$$

Le déterminant du système est :

$$\Delta = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

On déduit les valeurs de a et b :

$$a = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum x_i y_i & n\bar{x} \\ \bar{y} & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{a = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

$$b = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \left(\sum x_i^2\right) & \sum x_i y_i \\ \bar{x} & \bar{y} \end{vmatrix} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{b = \frac{\bar{y} \sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i y_i}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

Dans la pratique, on préférera déterminer b, à partir de l'équation (6) :

$$\boxed{b = \bar{y} - \bar{x}a}$$

REMARQUE. — Donnons une autre expression de a, en divisant le numérateur et le dénominateur par n :

$$a = \frac{\frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2}.$$

Comme la fluctuation : $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$ (n° 47)

$$a = \frac{\frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x^2}.$$

65. Formule simplifiée. — L'équation (6) exprime que le *point moyen de la distribution, de coordonnées* $(\bar{x}, \bar{y})$, *appartient à la droite d'ajustement* (D).

Si nous effectuons une translation du repère Oxy, en choisissant le point moyen $\omega(\bar{x}, \bar{y})$ pour nouvelle origine, les formules de transformation s'écrivent :

$$x_i = \bar{x} + X_i \qquad y_i = \bar{y} + Y_i.$$

L'équation de (D) dans le repère $X\omega Y$ devient (fig. 24) :

$$Y = aX.$$

Transformons l'expression de a en utilisant les lettres X_i, Y_i et en remarquant que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i = n\bar{Y} = 0.$$

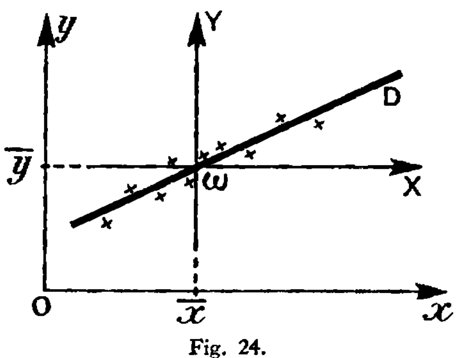


Fig. 24.

Le numérateur N de a devient :

$$N = \sum (\bar{x} + X_i)\cdot(\bar{y} + Y_i) - n\bar{x}\bar{y}$$

$$N = \sum \bar{x}\bar{y} + \bar{y}\sum X_i + \bar{x}\sum Y_i + \sum X_i Y_i - nx\bar{y}.$$

Comme $\sum \bar{x}\bar{y} = n\bar{x}\bar{y}$, $\bar{y}\sum X_i = 0$, $\bar{x}\sum Y_i = 0,$

$$N = \sum X_i Y_i.$$

Le dénominateur N' de a devient :

$$N' = \sum (\bar{x} + X_i)^2 - n\bar{x}^2 = \sum \bar{x}^2 + 2\bar{x}\sum X_i + \sum X_i^2 - n\bar{x}^2,$$

$$N' = \sum X_i^2.$$

Donc :

$$a = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$$

66. Exemple. — Reprenons l'exemple du n° 62. On veut ***déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite d'ajustement.***

Nous appliquons les formules du n° 64. Le tableau suivant indique les calculs préliminaires à faire.

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
0	4,25	0	0
1	3	3	1
2	3	6	4
3	1,75	5,25	9
4	1,5	6	16
5	0,5	2,5	25
6	0,25	1,5	36
21	14,25	24,25	91

$$\bar{x} = \frac{21}{7} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{14,25}{7} = 2,035.$$

$$a = \frac{24,25 - (7 \times 3 \times 2,035)}{91 - (7 \times 9)} = -0,66 \qquad b = 2,035 + (3 \times 0,66) = 4,015.$$

L'équation de la droite d'ajustement est :

$$y = -0,66x + 4,015$$

Pour une distribution continue, cette équation permet de faire des interpolations. Ainsi, pour la valeur $x = 2,5$,

$$y = -0,66 \times 2,5 + 4,015 = 5,665.$$

On appelle *valeurs ajustées* de la série, les valeurs obtenues à partir de l'équation de (D) pour les différentes valeurs de la variable x.

Ainsi, la valeur ajustée pour $x_i = 4$ est :

$$0,66 \times 4 + 4,015 = 1,375$$

67. Remarques. — 1° Dans l'exemple précédent, les valeurs de la variable x sont simples. Elles sont plus compliquées dans une série chronologique : le changement de variable consiste à remplacer les différentes années par des nombres plus simples représentant les périodes. C'est ainsi que l'on remplacera la suite

1965, 1966, 1967, 1968, 1969 par
1 , 2 , 3 , 4 , 5 ou par
— 2 , — 1 , 0 , 1 , 2 .

2° L'étude précédente s'étend aux variables continues en remplaçant les intervalles de classes par les centres de classes.

PROBLÈME RÉSOLU

Étant donné le tableau ci-dessous donnant le nombre de titulaires de comptes courants postaux de 1926 à 1935 :

Année	Nombre	Année	Nombre
1926	316 823	1931	539 293
1927	369 485	1932	572 869
1928	414 607	1933	604 682
1929	453 940	1934	634 539
1930	496 898	1935	665 563

représenter graphiquement la variation de cet effectif et ajuster une droite à ces données par la méthode des moindres carrés.

(Baccalauréat).

Choisissons les différentes époques

$$x_i = (-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

La droite d'ajustement sera définie :

— par son coefficient angulaire ... $a = \dfrac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$

— et son ordonnée à l'origine ... $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Les calculs sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Année	x_i	y_i	$x_i y_i$		x_i^2
1926	− 4	316 823	− 1 267 292		16
1927	− 3	369 485	− 1 108 455		9
1928	− 2	414 607	− 829 214		4
1929	− 1	453 940	− 453 940		1
1930	0	496 898	0	0	0
1931	1	539 293		539 293	1
1932	2	572 869		1 145 738	4
1933	3	604 682		1 814 046	9
1934	4	634 539		2 538 156	16
1935	5	665 563		3 327 815	25
	5	5 068 699	− 3 658 901	9 365 048	85
			+ 5 706 147		

$$\bar{x} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad \bar{y} = 506\,869{,}9.$$

$$a = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{5\,706\,147 - (5 \times 506\,869{,}9)}{85 - \left(10 \times \frac{1}{4}\right)} = 38\,446.$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 506\,869{,}9 - \left(38\,446 \times \frac{1}{2}\right) = 487\,646{,}9.$$

L'équation de la droite d'ajustement (fig. 25) est :

$$y = 38\,446\; x + 487\,646{,}9.$$

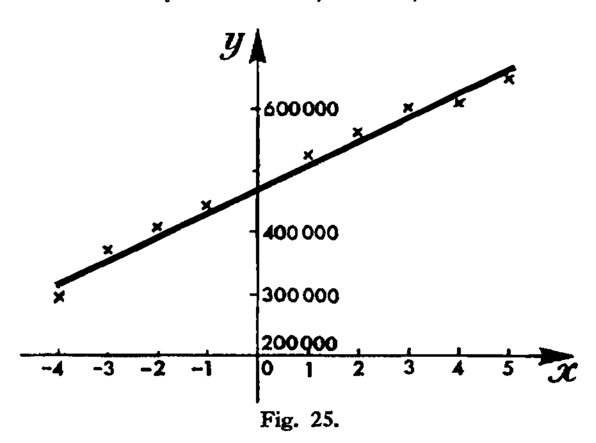


Fig. 25.

EXERCICES

— Ajuster par la méthode des moyennes discontinues, puis par la méthode des moindres carrés, les séries statistiques suivantes :

50.

x_i	1	3	5	7	9	5
y_i	7	6	3	5	1	0

51.

x_i	110	122	176	182	145	162	134	160
y_i	12	36	21	42	78	90	80	30

52. Étant donné les salaires horaires moyens d'un ouvrier professionnel dans les industries des métaux de la région parisienne :

Année	1950	1952	1954	1956	1958	1960	1962	1964
Salaire	1,15	1,82	1.99	2,36	2,83	3,20	3,75	4,40

1° Représenter graphiquement les données de ces 8 points.

2° Déterminer l'équation de la droite d'ajustement par la méthode des moyennes discontinues, puis par la méthode des moindres carrés.

Conseil : prendre pour les valeurs de la variable — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, 4.

3° Interpoler les résultats pour l'année 1953.

4° Extrapoler les résultats pour l'année 1970.

53. Les indices des prix de détail à Paris des appareils de chauffage sont donnés par le tableau (base 100 en 1949) :

Année	1950	1958	1959	1960	1961	1962	1963
Indice	166,4	176,4	184,5	186	186,6	194	204

1° Représenter graphiquement ces données.

2° Déterminer l'équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés.

3° En supposant que les conditions de l'avenir deviennent ce qu'elles étaient dans le passé, quel serait l'indice des prix de détail en 1970 ?

54. Étant donné les valeurs suivantes correspondant à la production française du minerai de fer, en millions de tonnes :

Année	1954	1960	1961	1962	1963
Production	44	67	66,5	66	58

Déterminer l'équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés.

55. 1° Montrer graphiquement qu'une relation linéaire semble lier les couples de données du tableau ci-dessous :

x_i	y_i	x_i	y_i
7 421	237 300	7 481	241 800
7 436	238 400	7 496	243 000
7 451	239 400	7 511	244 000
7 466	240 700		

2° En conséquence, ajuster à ces données une droite, par la méthode des moindres carrés. (Faire les calculs le plus simplement possible. Donner les résultats définitifs à 0,1 près.)

(*Baccalauréat*).

SÉRIES CHRONOLOGIQUES

68. Généralités. — ***Une série chronologique présente les grandeurs statistiques dans le temps.***

Les renseignements concernant l'évolution de la population, les indices des prix à la consommation, le trafic des voyageurs dans une région, les tonnages de la production d'un minerai... etc. sont recueillis dans des séries chronologiques. Leur étude présente un intérêt certain en matière économique et démographique.

EXEMPLE. — *Nombre de voyageurs transportés annuellement par la R.A.T.P., en millions* (Source : R.A.T.P.).

Année	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964
Effectif	1 160,8	1 159	1 166,1	1 113,3	1 130,1	1 182,6	1 186,8

69. Les composantes fondamentales. — La variation au cours du temps d'un phénomène économique peut être considéré comme résultant des *composantes fondamentales* d'un mouvement d'ensemble : *mouvement de longue durée, mouvement cyclique, mouvement saisonnier, variations accidentelles.*

1° **Le mouvement de longue durée ou tendance générale** (*trend* en anglais) se dégage du phénomène étudié au cours d'une longue période. Ainsi les prix de détail français subissent depuis 1950 une tendance générale nettement croissante, malgré certaines fluctuations.

2° **Le mouvement cyclique** se reproduit périodiquement dans certaines séries, traduisant ainsi des époques de prospérité ou de crise, des hausses ou des baisses de prix dans l'activité économique d'un pays.

3° **Le mouvement saisonnier.** — On constate dans certaines séries des variations saisonnières qui se reproduisent chaque année : les changements météorologiques (durée d'ensoleillement), l'augmentation du trafic ferroviaire pendant les fêtes de l'année, etc.

4° **Les variations accidentelles** se produisent de façon fortuites et non prévisibles : les accidents de travail, les grèves d'une entreprise peuvent modifier sa production ; les gelées printanières diminuent le rendement à l'hectare des vignobles, etc.

L'analyse d'une série chronologique consiste à déterminer :

— la tendance générale et l'étude des variations cycliques lorsque les données sont annuelles,

— les variations saisonnières lorsque la série se rapporte à une unité de temps plus courte (mois, jour, heure).

TENDANCE GÉNÉRALE

70. Procédé des moyennes mobiles. — Ce procédé est utilisé pour éliminer ou atténuer les irrégularités (variations accidentelles) que présente une série chronologique, afin de mieux dégager la *tendance générale*. Il consiste à substituer chaque terme de la série par la moyenne d'un groupe de données suivant le schéma ci-contre :

Temps x_i	Effectif y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
x_4	y_4
x_5	y_5

remplacé par

Temps x_i	Effectif
x_1	
x_2	$\frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$
x_3	$\frac{1}{3}(y_2 + y_3 + y_4)$
x_4	$\frac{1}{3}(y_3 + y_4 + y_5)$
x_5	

En choisissant trois termes dans le calcul de la *moyenne mobile*, il y a dans la nouvelle série deux observations perdues correspondant à x_1 et x_5.

Le nombre de termes qui figurent dans les groupements est généralement impair; il peut être supérieur à trois et il est laissé à l'initiative du statisticien.

71. Application à un exemple. — Considérons la série statistique représentant le rendement, évalué en hectolitres par hectare, d'une région viticole, au cours de 21 années consécutives.

Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Production	45	47	45	44	43	43	42	44	48	46	45
Année	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
Production	46	44	46	47	50	48	47	46	48	50	

La série des moyennes mobiles obtenue en groupant cinq termes est indiquée dans le tableau ci-contre :

Année	Production	Moyenne mobile
1	45	
2	47	
3	45	44,8
4	44	44,4
5	43	43,4
6	43	43,2
7	42	44
8	44	44,6
9	48	45
10	46	45,8
11	45	45,8
12	46	45,4
13	44	45,6
14	46	46,6
15	47	47
16	50	47,6
17	48	47,6
18	47	47,8
19	46	47,8
20	48	
21	50	

Le nombre 45 correspondant à l'année 3 est remplacé par :

$$\frac{1}{5}(45 + 47 + 45 + 44 + 43) = 44{,}8\text{... etc.}$$

La représentation graphique de la nouvelle série (fig. 25) fournit une idée du *mouvement de longue durée* et montre dans l'ensemble des 21 années un rendement *légèrement croissant.*

72. Droite de tendance générale *(Méthode des moindres carrés).* — Reprenons la série des moyennes mobiles et effectuons un ajustement linéaire. Pour simplifier les calculs faisons un changement d'axe Oy en posant :

$$x_i = 11 + X_i, \qquad y_i = 0 + Y_i$$

le nombre 11 étant la médiane de la série des années.

Les formules générales de la 7[e] leçon s'écrivent :

$$a = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad \text{et} \qquad b = y - ax.$$

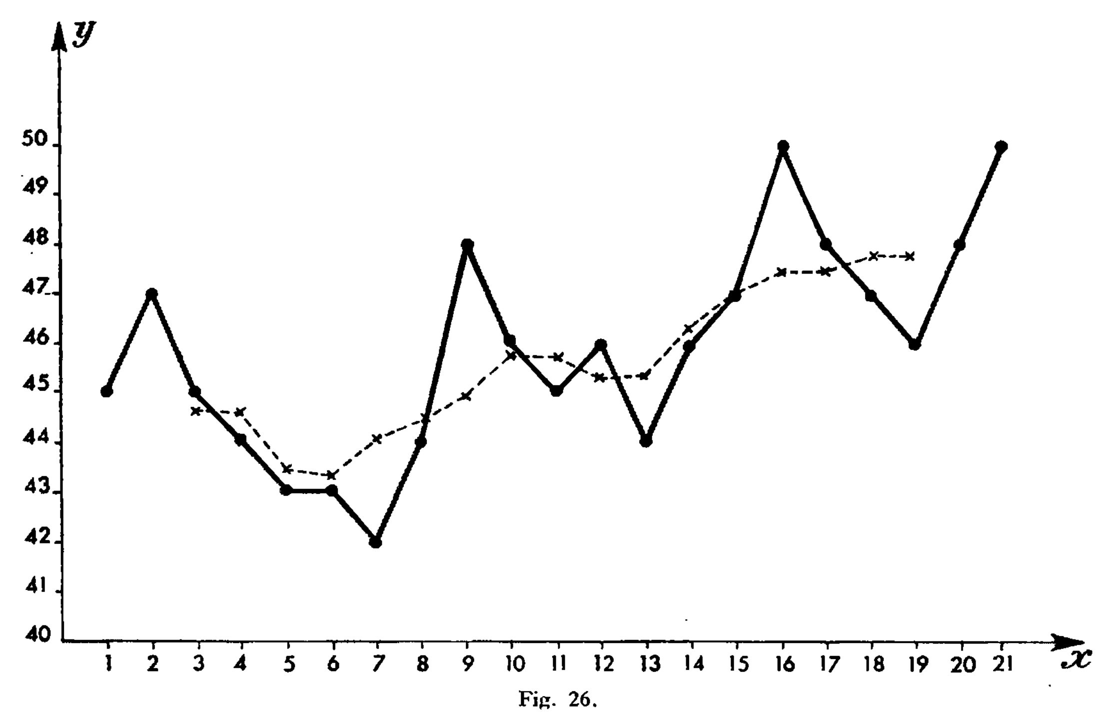


Fig. 26.

En remarquant que $\overline{X} = 0$, elles deviennent dans le nouveau repère (n° 65) :

$$a = \frac{\sum X_i y_i}{\sum X_i^2} \qquad \text{et} \qquad b = \bar{y}.$$

Le tableau suivant reproduit les calculs.

Année	Moyenne mobile y_i	X_i	$X_i y_i$		X_i^2	Valeurs ajustées ≈
3	44,8	− 8	− 358,4		64	43,44
4	44,4	− 7	− 310,8		49	43,71
5	43,4	− 6	− 260,4		36	44,00
6	43,2	− 5	− 216		25	44,28
7	44	− 4	− 176		16	44,55
8	44,6	− 3	− 133,8		9	44,83
9	45	− 2	− 90		4	45,11
10	45,8	− 1	− 45,8		1	45,39
11	45,8	0	0	0	0	45,67
12	45,4	1		45,4	1	45,95
13	45,6	2		91,2	4	46,23
14	46,6	3		139,8	9	46,51
15	47	4		188	16	46,79
16	47,6	5		238	25	47,07
17	47,6	6		285,6	36	47,34
18	47,8	7		334,6	49	47,62
19	47,8	8		382,4	64	47,90
	776,4		− 1 591,2	1 705,0	408	
			113,8			

$$a = \frac{113{,}8}{408} = 0{,}279 \qquad b = \bar{y} = \frac{776{,}4}{17} = 45{,}670.$$

Dans le nouveau système d'axes XOy, l'équation de la droite d'ajustement est :

$$y = 0{,}279\,X + 45{,}670 \qquad (1)$$

et dans le repère initial xOy :

$$y = 0{,}279\,(x - 11) + 45{,}670 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = 0{,}279\,x + 42{,}601}$$

Cette équation justifie bien la tendance très légèrement croissante du rendement à l'hectare pendant la période considérée.

73. Remarque. — La droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés, permet de déterminer les ***valeurs ajustées de la série*** qui figurent dans la colonne 6 du tableau. Pour le calcul, on a utilisé la formule (1); ainsi :

Année 3 : $X_i = -8$; valeur ajustée : $0{,}279 \times (-8) + 45{,}670 \approx 43{,}44$.

On pourrait obtenir une série d'écarts entre les données calculées par la méthode des moyennes mobiles et les données ajustées. Ainsi :

Année 3 écart : $44{,}8 - 43{,}44 = 1{,}36$

Année 9 écart : $45 - 45{,}11 = -0{,}11$

Ces écarts de signe variable mettent en évidence *la périodicité du phénomène* que l'on décelait directement à partir de la série initiale donnée.

VARIATIONS SAISONNIÈRES

74. Étude d'un exemple. — Dans ce chapitre, nous étudions le caractère saisonnier d'une série chronologique traduisant l'effectif total des voyageurs transportés mensuellement par la S.N.C.F. (source I.N.S.E.E., nombre exprimé en millions).

Année	J	F	M	A	Mai	Jn	Jt	Ao	S	O	N	D
1961	50,9	45	49,7	46,7	50,8	48,4	44,9	40,9	46,5	48,5	49,4	48,3
1962	51,7	44,8	48	46,4	50,1	48,3	47	40,4	46,2	54.3	50,7	50,7
1963	54,7	47,3	48,1	52,9	52,6	51,1	48,4	37,7	48	54	50,7	53,8

Un examen rapide de ce tableau montre des variations saisonnières régulières du trafic des voyageurs. On résoudra ce problème par deux procédés différents.

75. Procédé des moyennes mensuelles. — Calculons les moyennes mensuelles m_1 des mois de janvier, m_2 des mois de février, ... m_i des mois d'indice i,..., puis la moyenne arithmétique $\overline{m}$ des douze moyennes mensuelles m_i.

$$\overline{m} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} m_i.$$

Évaluons ensuite les *coefficients saisonniers* C_i relatifs à chaque mois en divisant m_i par $\overline{m}$:

$$C_i = \frac{m_i}{\overline{m}}.$$

Par exemple, le coefficient saisonnier de janvier est :

$$\frac{52{,}43}{48{,}54} = 1{,}08,$$

– le coefficient saisonnier d'août est : $\dfrac{39{,}66}{48{,}54} = 0{,}81.$

Le coefficient saisonnier de janvier montre que la S.N.C.F. transporte en janvier 8 % de voyageurs de plus que pendant un mois moyen.

Par contre, en août elle en transporte 19 % de moins.

Les coefficients saisonniers permettent d'obtenir les données corrigées après élimination de l'influence saisonnière. Par exemple, le trafic corrigé en janvier 1961 s'obtient en divisant la donnée brute 50,9 par le coefficient saisonnier de janvier 1,08, soit :

$$\frac{50{,}9}{1{,}08} = 47{,}1 \text{ millions de voyageurs.}$$

Le tableau suivant traduit les résultats.

Mois	1961	1962	1963	Moyenne mensuelle m_i	Coefficient saisonnier $C_i = \frac{m_i}{\bar{m}}$
Janvier	50,9	51,7	54,7	52,43	1,08
Février	45	44,8	47,3	45,70	0,94
Mars	49,7	48	48,1	48,60	1,00
Avril	46,7	46,4	52,9	48,60	1,00
Mai	50,8	50,1	52,6	51,16	1,05
Juin	48,4	48,3	51,1	49,26	1,01
Juillet	44,9	47	48,4	46,76	0,96
Août	40,9	40,4	37,7	39,66	0,81
Septembre	46,8	46,2	48	46,90	0,96
Octobre	48,5	54,3	54	52,26	1,07
Novembre	49,4	50,7	50,7	50,26	1,03
Décembre	48,3	50,7	53,8	50,93	1,05
				582,52	

Moyenne générale $\bar{m} = 48,54$

Remarque. — La méthode des moyennes mensuelles présente l'avantage d'être simple. Cependant, elle ne tient pas compte du mouvement de longue durée. En effet, on a calculé les coefficients saisonniers à partir d'une *moyenne générale mensuelle* $\bar{m}$, la même pour les années étudiées; on a donc supposé que les données ne sont pas soumises à une tendance générale, alors que le trafic des voyageurs présente une hausse progressive au cours des trois années.

76. Méthode des chaînes de rapports. — Cette méthode, plus complexe que la précédente, permet d'éliminer les mouvements de tendance générale et le mouvement cyclique. On opère de la façon suivante :

1° On calcule le rapport du nombre de voyageurs d'un mois au nombre de voyageurs du mois précédent; cette opération est renouvelée pour chaque mois. Ces rapports sont inscrits par ordre décroissant dans un tableau à douze colonnes comprenant une bande horizontale médiane où sont inscrits les nombres compris entre 0,98 et 1,02.

Par exemple, pour le mois de juin 1962, nous effectuons le rapport :

$$\frac{\text{voyageurs juin 1962}}{\text{voyageurs mai 1962}} = \frac{48,3}{50,1} = 0,96,$$

et pour le mois de janvier 1963, le rapport :

$$\frac{\text{voyageurs janvier 1963}}{\text{voyageurs décembre 1962}} = \frac{54,7}{50,7} = 1,07.$$

J	F	M	A	Mai	Jn	Jt	Ao	S	O	N	D
1,07 1,07		1,10 1,07	1,09	1,08 1,07				1,27 1,14 1,13	1,17 1,12 1,04		1,06
		1,01		0,99						1,01	1
	0,88 0,866 0,86		0,96 0,93		0,97 0,96 0,95	0,97 0,94 0,92	0,91 0,85 0,77			0,938 0,93	0,97

Ce tableau traduit le ***mouvement saisonnier*** : une baisse de trafic en février, juin, juillet, août et un accroissement en janvier, septembre, octobre.

2° ***Calcul des coefficients saisonniers.*** — On remplace les rapports de chaque colonne du tableau précédent par un nombre qui caractérise chaque mois : ce nombre est, soit la moyenne arithmétique, soit la médiane qui présente l'avantage d'éliminer les valeurs extrêmes. En utilisant les notations simplifiées du type $\frac{M}{F}$ pour désigner la médiane des 3 rapports $\frac{\text{voyageurs en mars}}{\text{voyageurs en février}}$, on obtient les 12 coefficients :

$\frac{J}{D_{-1}}$	$\frac{F}{J}$	$\frac{M}{F}$	$\frac{A}{M}$	$\frac{Mai}{A}$	$\frac{Jn}{Mai}$	$\frac{Jt}{Jn}$	$\frac{Ao}{Jt}$	$\frac{S}{Ao}$	$\frac{O}{S}$	$\frac{N}{O}$	$\frac{D}{N}$
1,07	0,866	1,07	0,96	1,07	0,96	0,94	0,85	1,14	1,12	0,938	1

Dans le rapport $\frac{J}{D_{-1}}$, D_{-1} représente le mois de décembre de l'année précédente.

On ramène ces coefficients à la ***base de janvier*** en procédant comme suit :

$$\frac{F}{J} = 0{,}866$$

$$\frac{M}{J} = \frac{M}{F} \times \frac{F}{J} = 1{,}07 \times 0{,}866 \approx 0{,}9266$$

$$\frac{A}{J} = \frac{A}{M} \times \frac{M}{J} = 0{,}96 \times 0{,}9266 \approx 0{,}8895$$

$$\frac{Mai}{J} = \frac{Mai}{A} \times \frac{A}{J} = 1{,}07 \times 0{,}8895 \approx 0{,}9517$$

$$\frac{Jn}{J} = \frac{Jn}{Mai} \times \frac{Mai}{J} = 0{,}96 \times 0{,}9517 \approx 0{,}9136$$

$$\frac{Jt}{J} = \frac{Jt}{Jn} \times \frac{Jn}{J} = 0{,}94 \times 0{,}9136 \approx 0{,}8587$$

$$\frac{Ao}{J} = \frac{Ao}{Jt} \times \frac{Jt}{J} = 0{,}85 \times 0{,}8587 \approx 0{,}7299$$

$$\frac{S}{J} = \frac{S}{Ao} \times \frac{Ao}{J} = 1{,}14 \times 0{,}7299 \approx 0{,}8320$$

$$\frac{O}{J} = \frac{O}{S} \times \frac{S}{J} = 1{,}12 \times 0{,}832 \approx 0{,}9318$$

$$\frac{N}{J} = \frac{N}{O} \times \frac{O}{J} = 0{,}938 \times 0{,}9318 \approx 0{,}8740$$

$$\frac{D}{J} = \frac{D}{N} \times \frac{N}{J} = 1 \times 0{,}8740 \approx 0{,}8740$$

Cet ensemble de rapports constitue une « chaîne » que l'on peut fermer en calculant

$$\frac{D}{J} \times \frac{J}{D_{-1}} = 0{,}874 \times 1{,}07 \approx 0{,}9352.$$

Si le facteur saisonnier était seul à intervenir on devrait trouver 1 pour ce dernier rapport, ce qui aurait permis de confondre D et D_{-1}. Pour *éliminer l'influence de longue durée* que l'on suppose régulière, on introduit un nombre k, tel que chaque coefficient soit multiplié respectivement par k, k^2, k^3, ..., k^{12}.

k est donc défini par l'égalité :

$$0{,}9352 \times k^{12} = 1 \implies k^{12} = \frac{1}{0{,}9352}$$

$$12 \log k = \operatorname{colog} 0{,}9352 = 0{,}02910$$

$$\log k = \frac{0{,}02910}{12} = 0{,}002425 \implies k = 1{,}0056.$$

Les nouveaux coefficients corrigés deviennent donc :

$$\frac{F}{J} = 0{,}866 \times 1{,}0056 = 0{,}8708$$

$$\frac{M}{J} = 0{,}9266 \times (1{,}0056)^2 = 0{,}9370$$

$$\frac{A}{J} = 0{,}8895 \times (1{,}0056)^3 = 0{,}9045$$

$$\frac{Mai}{J} = 0{,}9517 \times (1{,}0056)^4 = 0{,}9732$$

$$\frac{Jn}{J} = 0{,}9136 \times (1{,}0056)^5 = 0{,}9395$$

$$\frac{Jt}{J} = 0{,}8587 \times (1{,}0056)^6 = 0{,}8880$$

$$\frac{Ao}{J} = 0{,}7299 \times (1{,}0056)^7 = 0{,}7590$$

$$\frac{S}{J} = 0{,}8320 \times (1{,}0056)^8 = 0{,}8700$$

$$\frac{O}{J} = 0{,}9318 \times (1{,}0056)^9 = 0{,}9798$$

$$\frac{N}{J} = 0{,}8740 \times (1{,}0056)^{10} = 0{,}9242$$

$$\frac{D}{J} = 0{,}8740 \times (1{,}0056)^{11} = 0{,}9294$$

$$\frac{J}{J} = 1.$$

La moyenne arithmétique des coefficients corrigés est :

$$u = 0{,}9146.$$

On détermine les valeurs définitives des coefficients saisonniers en ramenant la moyenne à la base 1. Ainsi, pour janvier le coefficient saisonnier est :

$$J = \frac{1}{u} = 1{,}093,$$

— pour février : $$F = \frac{0{,}8788}{0{,}9146} = 0{,}952.$$

On déduit les résultats définitifs dans le tableau :

J	F	M	A	Mai	Jn	Jt	Ao	S	O	N	D
1,093	0,952	1,024	0,989	1,064	1,027	0,970	0,829	0,951	1,071	1,010	1,016

Les données corrigées du trafic des voyageurs s'obtiennent en divisant les données brutes par le coefficient saisonnier du mois correspondant.

Cette méthode n'est satisfaisante que si les mouvements saisonniers *sont réguliers*, ce qui n'est pas toujours réalisé.

EXERCICES

56. Déterminer la tendance de longue durée de la série chronologique, en utilisant la méthode des moyennes mobiles (on pourra découper la série en période de 5 ans). Faire une représentation graphique.

Années	Production de fonte (milliers de tonnes)	Années	Production de fonte
1901	2 389	1908	3 401
1902	2 405	1909	3 574
1903	2 841	1910	4 038
1904	2 974	1911	4 470
1905	3 077	1912	4 939
1906	3 314	1913	5 207
1907	3 590		

(*Baccalauréat*).

57. De 1946 à 1958, le taux de la mortalité en France a évolué de la façon suivante (taux pour mille) :

Années	Taux	Années	Taux
1946	13,4	1953	13
1947	13,2	1954	12
1948	12,4	1955	12,1
1949	13,6	1956	12,3
1950	12,7	1957	12
1951	13,3	1958	11,2
1952	12,3		

Étudier la tendance de longue durée de ce phénomène par la méthode des moyennes mobiles (prendre des périodes de 5 ans).

Faire une représentation graphique.

(*Baccalauréat*).

58. Le tableau de vente, par une entreprise, des appareils frigorifiques s'établit comme suit :

Années	J	F	M	A	Mai	Jn	Jt	Ao	S	O	N	D
1952	543	625	815	418	734	1 834	1 293	580	104	89	280	310
1953	484	578	977	334	726	1 746	1 182	592	102	78	312	436

1° Tracer la courbe chronologique.

2° Pour ces deux années, tracer la droite de longue durée; donner l'équation de cette droite; indiquer comment on obtiendrait les données régularisées pour les années 1952 et 1953.

(Dans les calculs pour la recherche de cette équation, les ventes seront appréciées à une dizaine près.)

59. Les heures d'ensoleillement mensuel à la station météorologique de Montpellier durant les années 1962, 1963, 1964 sont les suivantes :

Années	J	F	M	A	Mai	Jn	Jt	Ao	S	O	N	D
1962	159	159	198	263	288	352	386	361	246	197	141	137
1963	138	154	177	236	331	274	351	269	186	228	104	107
1964	140	147	185	220	304	334	346	328	213	210	158	100

1° Déterminer les coefficients saisonniers d'ensoleillement en utilisant le « procédé des moyennes mensuelles ».

2° Tracer la courbe chronologique et tracer la droite de longue durée. Donner l'équation de cette droite et les données d'ensoleillement régularisées.

NOTIONS SUR LA CORRÉLATION

77. Généralités. — Dans les leçons précédentes, nous avons étudié les séries dont les effectifs présentaient un *caractère commun.* Dans cette leçon, nous considérons des séries statistiques portant sur deux caractères ou deux variables, et nous cherchons s'il existe une relation entre les valeurs de ces caractères. Différents cas peuvent se produire.

1° *Il existe une relation fonctionnelle entre les deux caractères :* la connaissance de la valeur d'une variable x entraîne rigoureusement celle de l'autre variable y. Par exemple, dans une « population de cercles », la connaissance du rayon x définit sans ambiguïté l'aire de la surface $y = \pi x^2$.

2° *Les deux caractères sont indépendants :* les deux variables n'ont aucun lien entre elles. Citons, par exemple, la *taille* d'un chauffeur et la *puissance* du véhicule qu'il conduit.

3° *Les deux caractères présentent une dépendance statistique* : sans être rigoureusement liés par une relation fonctionnelle, les deux variables présentent toutefois un certain lien que l'on pressent; elles croissent ou décroissent simultanément. On dit qu'elles sont en *corrélation.*

L'âge et la taille des enfants sont deux caractères en corrélation, car il apparaît que les plus agés sont généralement les plus grands.

Deux caractères d'une même population sont en corrélation lorsque les variations de l'un dépendent des variations de l'autre.

78. Étude graphique. — Considérons deux séries statistiques relatives à une même population et portant sur deux caractères différents dont les valeurs sont notées respectivement x_i et y_i. Figurons dans un repère xOy, les n points M_i de coordonnées (x_i, y_i). Cet ensemble de points forme un *nuage statistique qui peut présenter divers aspects :*

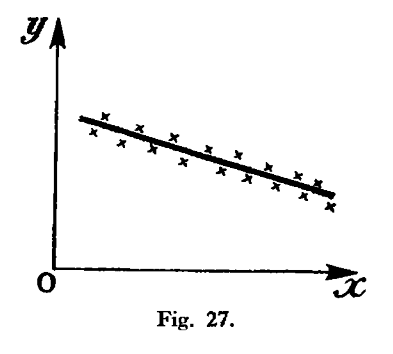


Fig. 27.

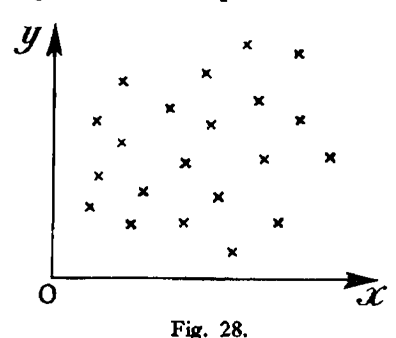


Fig. 28.

1° Les points M_i se répartissent d'une façon très serrée au voisinage d'une courbe : droite, parabole... etc. (fig. 27). On pense, dans ces conditions, à l'existence d'une *relation fonctionnelle* entre les variables x et y.

2° Les points M_i se répartissent au hasard (fig. 28). Les variables x et y sont *indépendantes.*

3° Les points couvrent une région déterminée du plan (fig. 29). Les variables x et y peuvent varier dans le même sens ou en sens contraire. Le graphique suggère l'existence d'une *corrélation* entre les deux variables.

La corrélation est dite positive si les deux caractères varient dans le même sens, négative dans l'autre cas.

L'étude de la corrélation entre deux caractères d'une même population est l'objet essentiel de cette leçon.

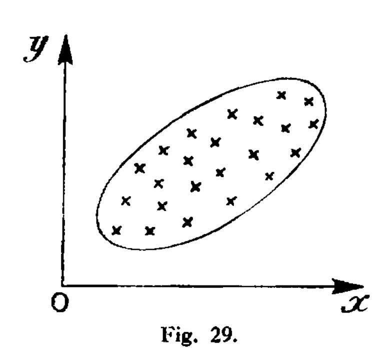


Fig. 29.

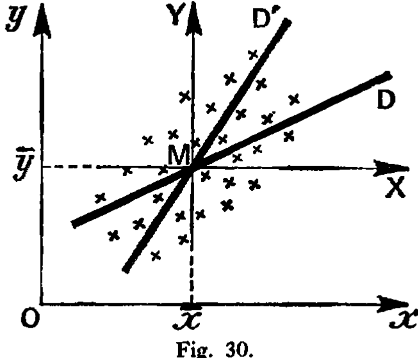


Fig. 30.

79. Droites de régression. — Supposons que l'étude graphique des variations de deux caractères d'une même population statistique ait mis en évidence l'existence d'une corrélation (fig. 30).

Nous savons déterminer par la méthode des moindres carrés (n° 64) une droite D, d'équation $y = ax + b$, telle que les valeurs de y ajustées sur D donnent, à partir des valeurs x_i d'une variable, de bonnes approximations des valeurs y_i de l'autre variable.

D est appelée droite de régression de y par rapport à x.

On détermine de la même façon une droite D' d'équation $x = a'y + b'$, telles que les valeurs de x ajustées sur D', définissent à partir des valeurs y_i de bonnes approximations des valeurs de x_i.

D' est appelée droite de régression de x par rapport à y.

80. Équations des droites de régression.

1° L'équation $y = ax + b$ de la droite D, droite de régression de y par rapport à x, a été définie au n° 64, par la méthode des moindres carrés. Rappelons, avec les mêmes notations, les formules :

$$a = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad \text{ou} \quad a = \frac{\frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x^2} \qquad (1)$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Nous savons que la droite D passe par le point moyen du nuage de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$.

2° L'équation $x = a'y + b'$ de la droite D', droite de régression de x par rapport à y, s'obtient à partir de D, en échangeant les lettres x et y.

$$a' = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2} \quad \text{ou} \quad a' = \frac{\frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_y^2} \qquad (2)$$

$$b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

Les formules (1) et (2) montrent que a et a' ont le même signe.

3° EXERCICE : *Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les droites de régression soient confondues.*

Comme les deux droites passent par le point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage statistique, l'égalité de leur coefficient angulaire, a pour D, $\frac{1}{a'}$ pour D', est une condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient confondues :

$$a = \frac{1}{a'} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{aa' = 1}$$

81. Coefficient de corrélation linéaire. — ***On appelle coefficient de corrélation linéaire, le nombre r racine carrée du produit des coefficients angulaires des deux droites de régression.***

$$\boxed{r^2 = aa'}$$

En remplaçant a et a' par leur valeur, il vient :

$$r^2 = \frac{\left[\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\right]^2}{\left[\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right]\left[\sum y_i^2 - n\bar{y}^2\right]}, \quad \text{ou} \quad r^2 = \frac{\left[\frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}\right]^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}.$$

En utilisant l'écart-type, on posera :

$$\boxed{r = \frac{\frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}}$$

82. Formules simplifiées. — Les formules précédentes se simplifient en effectuant une translation des axes de vecteur $\overrightarrow{OM}$, où M représente le point moyen de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$. Les formules de transformation s'écrivent :

$$x_i = \bar{x} + X_i \qquad y_i = y + Y_i.$$

D'après le n° 65 :

$$a = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} \qquad a' = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum Y_i^2}.$$

Comme la variance $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2$ (n° 45),

$$a = \frac{\sum X_i Y_i}{n\sigma_x^2} \qquad a' = \frac{\sum X_i Y_i}{n\sigma_y^2}$$

Le coefficient de corrélation devient :

$$\boxed{r = \frac{\sum X_i Y_i}{\sqrt{\sum X_i^2 \cdot \sum Y_i^2}} = \frac{\sum X_i Y_i}{n\,\sigma_x\,\sigma_y}}$$

Remarques. — 1° La dernière expression montre que $r = a.\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = a'.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$; r est du signe de a et a'.

2° L'expression $\frac{\sum X_i Y_i}{n}$ est appelée *covariance* des deux variables X et Y.

83. Propriétés du coefficient de corrélation linéaire. — 1° Calculons la somme des carrés des écarts des points du nuage statistique à la droite de régression D d'équation $Y = aX$, dans le repère XMY (fig. 30).

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum (Y_i - aX_i)^2.$$

Développons :

$$\mathrm{A} = \sum Y_i^2 - 2a\sum X_i Y_i + a^2 \sum X_i^2.$$

Remplaçons a par $\frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$:

$$\mathrm{A} = \sum Y_i^2 - 2\frac{\left(\sum X_i Y_i\right)^2}{\sum X_i^2} + \frac{\left(\sum X_i Y_i\right)^2}{\sum X_i^2} = \sum Y_i^2 - \frac{\left(\sum X_i Y_i\right)^2}{\sum X_i^2}$$

soit :

$$\sum e_i^2 = \sum Y_i^2 \cdot [1 - r^2] \qquad (3)$$

Le premier membre étant positif, $1 - r^2 \geqslant 0$, donc :

$$\boxed{-1 \leqslant r \leqslant 1}$$

Le coefficient de corrélation linéaire est compris entre les valeurs limites — 1 et + 1.

2° En divisant par n les deux membres de (3), on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum e_i^2 = \frac{1}{n}\sum Y_i^2 \cdot (1 - r^2)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n}\sum e_i^2 = \sigma_y^2(1 - r^2).$$

Interprétons ce dernier résultat :

Si $|r|$ est voisin de 1, $\frac{1}{n}\sum e_i^2$ est voisin de zéro; les points du nuage sont très serrés autour de la droite D qui tend à se confondre avec la droite D' (n° 79). La relation entre x et y tend donc à être *fonctionnelle*.

Au contraire, si $r \approx 0$, $\frac{1}{n}\sum e_i^2$ est maximum, les variables x et y sont pratiquement *indépendantes* et le nuage statistique est très dispersé.

84. Exemple d'application. — Considérons pendant les neuf premiers mois de l'année 1952, le nombre de jours de pluie et la durée d'ensoleillement à Montpellier.

Mois	J	F	M	A	Mai	Jn	Jt	Ao	S
Jours de pluie x_i	7	6	11	8	6	3	0	4	9
Heures d'ensoleillement	125	186	164	255	332	371	407	306	275

La représentation graphique (fig. 31) fait apparaître une corrélation entre les deux variables x (jours de pluie) et y (heures d'ensoleillement).

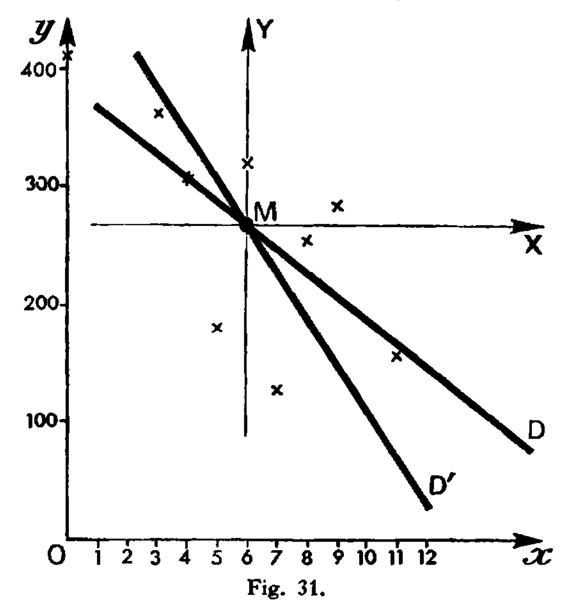


Fig. 31.

Déterminons les droites de régression et le coefficient de corrélation linéaire.

Pour cela, nous effectuons un changement d'axes : la nouvelle origine est le point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$. Les calculs sont mentionnés dans le tableau suivant :

x_i	y_i	$X_i = x_i - \bar{x}$	$Y_i = y_i - \bar{y}$	X_iY_i		X_i^2	Y_i^2
7	125	1	− 144	− 144		1	20 736
6	186	0	− 83		0	0	6 889
11	164	5	− 105	− 525		25	11 025
8	255	2	− 14	− 28		4	196
6	332	0	63	0	0	0	3 969
3	371	− 3	102	− 306		9	10 404
0	407	− 6	138	− 828		36	19 044
4	306	− 2	37	− 74		4	1 369
9	275	3	6		18	9	36
54	2 421			− 1 905	18	88	73 668
				− 1 887			

$$\bar{x} = \frac{54}{9} = 6 \qquad \bar{y} = \frac{2\,421}{9} = 269$$

$$a = \frac{\sum X_iY_i}{\sum X_i^2} = -\frac{1\,887}{88} \approx -21{,}44 \qquad a' = \frac{\sum X_iY_i}{\sum Y_i^2} = -\frac{1\,887}{73\,668} \approx -0{,}025.$$

Équations des droites de régression

— dans le repère XMY :

$Y = -21{,}44\, X$ et $X = -0{,}025\, Y$

— dans le repère xOy :

(D) $y - 269 = -21{,}44\,(x - 6)$ soit $y = -21{,}44\, x + 397{,}64$

et (D') $x - 6 = -0{,}025\,(y - 269)$ soit $x = -0{,}025\, y + 12{,}725$

Coefficient de corrélation

$$r = -\sqrt{21{,}44 \times 0{,}025} \approx -0{,}7.$$

La valeur de r montre qu'il existe une bonne corrélation entre les heures d'ensoleillement et les jours de pluie.

TABLE DE CORRÉLATION

85. Définition. — Lorsque le nombre n d'unités statistiques devient important (supérieur à 100), on utilise un tableau à double entrée, appelé ***table de corrélation***, divisé en cases rectangulaires et contenant, dans chacune d'elles, l'effectif n_{ij} qui possède les valeurs x_i et y_i des variables x et y.

Schéma et explication d'une table de corrélation.

x / y	x_1	x_2	x_3	x_4	Total
y_1	n_{11}	n_{21}	n_{31}	n_{41}	n_{y_1}
y_2	n_{12}	n_{22}	n_{32}	n_{42}	n_{y_2}
y_3	n_{13}	n_{23}	n_{33}	n_{43}	n_{y_3}
Total	n_{x_1}	n_x	n_{x_3}	n_{x_4}	n

n_{21} est l'effectif possédant les caractères évalués x_2 et y_1.
n_{y_1} est l'effectif possédant le caractère évalué y_1.
n_{x_1} est l'effectif possédant le caractère évalué x_1,
n est l'effectif total.

$$n = n_{x_1} + n_{x_2} + n_{x_3} = n_{y_1} + n_{y_2} + n_{y_3}.$$

Lorsque les séries doubles sont à *caractère continu*, les x_i et y_i représentent les valeurs centrales des intervalles de classe.

86. Exemple. — Le tableau suivant représente les effectifs de 100 enfants répartis suivant leur âge et leur taille.

Age / Taille	3 à 5	5 à 7	7 à 9	Total
75 à 85 cm	15	8	2	25
85 à 95 cm	10	32	13	55
95 à 105 cm	0	5	15	20
Total	25	45	30	100

Explication de la table.

— 8 enfants âgés de 5 à 7 ans ont une taille comprise entre 75 et 85 cm.
— 15 enfants agés de 7 à 9 ans ont une taille comprise entre 95 et 105 cm.

La colonne de droite indique le nombre d'enfants ayant une taille donnée et la dernière ligne, le nombre d'enfants ayant un âge donné.

La 5e ligne et la 5e colonne représentent des *séries marginales*.

Corrélation des deux caractères.

Pour déterminer la corrélation des deux caractères, on utilise la formule simplifiée en se ramenant au point moyen du nuage statistique, après avoir défini les centres de classes :

$\bar{x} = 6{,}1 \approx 6$, moyenne des centres de classes des âges.
$\bar{y} = 89{,}5 \approx 90$, moyenne des centres de classes des tailles.

Dans ces conditions, après avoir posé :

$$x_i = \bar{x} + X_i \qquad y_i = \bar{y} + Y_i$$

$$r = \frac{\sum X_i Y_i}{\sqrt{\sum X_i^2 \cdot \sum Y_i^2}}.$$

Les calculs sont résumés dans le tableau où nous figurons dans la 1re ligne et la 1re colonne les centres des classes.

$y \backslash x$	4	6	8	Total n_y	$Y_i = y - 90$	$Y_i n_y$	$n_y Y_i^2$	V	$Y_i V$
80	15	8	2	25	− 10	− 250	2 500	− 26	260
90	t0	32	13	55	0	0	0	6	0
100	0	5	15	20	+ 10	200	2 000	30	300
Total n_x	25	45	30	100			4 500		560
$X_i = x_i - 6$	− 2	0	+ 2						
$n_x X_i$	− 50	0	60						
$n_x X_i^2$	100	0	120	220					

Explication des calculs.

Le calcul de $\sum Y_i^2$ fait intervenir les effectifs correspondants. On a pour cela calculé $n_y Y_i$ dans la colonne 7. Le calcul de $n_y Y_i^2$ s'en déduit dans la colonne 8, soit :

$$\sum Y_i^2 = 4500.$$

De même (ligne 8) $\quad \sum X_i^2 = 220.$

Pour le calcul de $\sum X_i Y_i$, on a, tout d'abord, défini V :

2[e] ligne : $((-2) \times 15) + (0 \times 8) + (2 \times 2) = -26$

3[e] ligne : $((-2) \times 10) + (0 \times 32) + (2 \times 13) = 6$

4[e] ligne : $((-2) \times 0) + (0 \times 5) + (2 \times 15) = 30$

Dans la colonne $Y_i V$, chaque ligne représente une somme partielle de $\sum X_i Y_i$.

$$\sum X_i Y_i = 560.$$

$$r = \frac{\sum X_i Y_i}{\sqrt{\sum X_i^2 \cdot \sum Y_i^2}} = \frac{560}{\sqrt{4\,500 \times 220}} \approx 0{,}56.$$

Ce résultat traduit une assez bonne corrélation entre les âges et les tailles des enfants.

EXERCICES

60. 1° Représenter le nuage statistique des données suivantes.

x : 2, 0, 4, 8, 2, 0.
y : 5, 1, 3, 5, 4, 0.

2° Déterminer les droites de régression;
3° Donner une estimation de y pour $x = 3$.
4° Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

61. On considère les données des deux caractères :

x : 1, 3, 5, 1, 1, 7, 3, 2.
y : 12, 0, 2, 2, 4, 1, 0, 0.

1° Construire le nuage statistique.
2° Déterminer les droites de régression et donner une estimation de x pour $y = 5$.
3° Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

62. Le tableau suivant donne un indice des prix de gros et l'indice de la production industrielle aux États-Unis (d'après G. Tintner).

Année	Prix de gros (x)	Production industrielle (y)
1935	80	87
1936	81	103
1937	86	113
1938	79	89
1939	77	109

1° Déterminer les deux lignes de régression.

2° Faire un diagramme de dispersion.

3° En supposant que les conditions demeurent les mêmes que pendant la période considérée, donner une estimation de l'indice de la production industrielle pour un indice de prix de gros de 90; et une estimation de l'indice des prix de gros si l'indice de la production industrielle est 120.

4° Calculer le coefficient de corrélation.

63. Le tableau suivant donne, pendant les neuf premiers mois de l'année 1952, le nombre de véhicules neufs immatriculés et le nombre de m³ d'essence consommée dans le département de l'Hérault.

Mois	J	F	M	A	Mai	Jn	Jt	Ao	S
Véhicules	600	515	610	525	530	585	610	450	420
Essence m^3	2 900	2 100	2 450	2 900	3 100	2 900	3 500	3 700	2 700

Déterminer les deux droites de régression et le coefficient de corrélation.

64. Au cours d'un examen comportant deux compositions, 11 candidats ont obtenu les notes suivantes :

Candidats n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1re épreuve	8	2	10	14	4	14	12	18	14	16	6
2e épreuve	10	6	14	16	8	10	10	14	12	6	6

1° Représenter graphiquement le nuage statistique.

2° Déterminer les droites de régression.

3° Calculer la corrélation entre les séries des notes.

65. Dans un rapport sur la conjoncture économique, on relève le tableau ci-dessous :

France entière	Taux des salaires horaires	Indice d'ensemble des prix de détail
Mars 1950	105	105,3
Juin 1950	107	103,9
Septembre 1950	114	109,2
Décembre 1950	120	113,6
Mars 1951	127	119,7
Juin 1951	138	127
Septembre 1951	156	131,6
Décembre 1951	160	141,3
Mars 1952	162	146,9
Juin 1952	163	142,7
Septembre 1952	164	147,9

Représenter graphiquement l'évolution des deux variables économiques : taux des salaires (x) et indice des prix de détail (y) en fonction du temps. Calculer le coefficient de corrélation existant entre les deux variables.

On pourra utiliser les résultats suivants :
Série des taux de salaires : moyenne, 137,8 ; écart-type, 22,9 ;
Série des indices des prix : moyenne, 126,3 ; écart-type, 16,1.

(*Baccalauréat*).

66. On a relevé à la station météorogique de Montpellier, les heures d'ensoleillement et la hauteur d'eau de pluie tombée durant les mois de l'année 1965 :

Mois	J	F	M	A	Mai	Jn	Jt	Ao	S	O	N	D
Heures d'ensoleillement	137	198	201	251	325	323	300	335	202	130	128	116
Hauteur eau *mm*	68	49	47	1	5	13	9	25	56	234	19	60

1° Représenter graphiquement le nuage statistique.

2° Déterminer les deux droites de régression et le coefficient de corrélation entre les heures d'ensoleillement et la hauteur d'eau de pluie.

67. On donne le tableau à double entrée relatif à l'étude de la série double suivante : voitures de petites cylindrées circulant dans Paris, classées en pourcentage sous les deux caractères suivants : puissance de la voiture et durée moyenne des pneumatiques.

y \ x	2	3	4	Total
20	0	8	30	38
25	5	20	7	32
30	25	3	2	30
Total	30	31	39	100

x désigne la puissance en CV ;

y désigne la durée des pneumatiques en milliers de kilomètres.

On demande :

1° Représenter graphiquement cette série par un nuage de points.

2° Calculer l'équation des deux droites de régression et le coefficient de corrélation.

3° Construire les droites de régression sur le graphique représentatif de la série.

(*Baccalauréat*).

PROBLÈMES DE RÉVISION

68. On donne la série statistique suivante, correspondant à la répartition des quotidiens de province, d'après l'importance du tirage moyen :

de 5 000 à moins de 10 000	: 16;
de 10 000 à moins de 30 000	: 24;
de 30 000 à moins de 50 000	: 16;
de 50 000 à moins de 70 000	: 14;
de 70 000 à moins de 100 000	: 14;
de 100 000 à moins de 150 000	: 10;
de 150 000 à moins de 200 000	: 4;
plus de 200 000	: 2.

En explicitant d'une façon précise les hypothèses faites, construire, pour cette série statistique : *a)* le polygone des fréquences cumulées; *b)* l'histogramme; *c)* le polygone des fréquences.

On expliquera comment on passe du polygone des fréquences cumulées à l'histogramme, puis de l'histogramme au polygone des fréquences. Quelle valeur peut-on adopter pour la médiane de cette série statistique ?

69. On a effectué des mesures du diamètre biacromial (largeur des épaules) des enfants appartenant à un groupe de 117 enfants du même âge. Les mesures, en centimètres, sont classées dans des intervalles de 0,7 cm, conduisant au tableau ci-dessous :

Intervalles :	24,7	25,4	26,1	26,8	27,5	28,2	28,9
Nombres d'enfants :	1	3	8	11	18	20	
Intervalles :	28,9	29,6	30,3	31,0	31,7	32,4	33,1
Nombres d'enfants :	21	12	12	8	2	0	1.

En utilisant ces mesures et en prenant dans chaque intervalle la valeur moyenne comme valeur représentative :

1° Construire le polygone de cette répartition par classes.

2° Construire le polygone des fréquences cumulées.

3° Calculer la moyenne M, du diamètre biacromial.

4° Quelle est la dominante D ? Calculer la médiane *m*.

70. Dans une entreprise employant 1 000 ouvriers les salaires hebdomadaires sont répartis de la façon suivante :

Salaires (F)	Nombre d'ouvriers
150 à 170	45
170 à 190	102
190 à 210	240
210 à 230	350
230 à 250	104
250 à 270	72
270 à 290	58
290 à 310	29
	1 000

1° Construire l'histogramme représentant les variations de cette série de la courbe cumulative.

2° Calculer : la médiane (vérification graphique); la moyenne arithmétique; l'écart-type.

71. La production de fonte en milliers de tonnes, en France, est donnée par le tableau suivant :

1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907
2 389	2 405	2 841	2 974	3 077	3 314	3 590
1908	1909	1910	1911	1912	1913	
3 401	3 574	4 038	4 470	4 939	5 207	

Faire un ajustement analytique et le graphique représentatif.

72. Une enquête effectuée dans un village, portant sur le nombre d'enfants par foyer, a conduit aux résultats suivants :

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de foyers	105	139	97	63	47	33	10	4	2

1° Quelles sont les fréquences relatives des foyers ayant un nombre d'enfants déterminé n ($0 \leqslant n \leqslant 8$) ? Représentation graphique.

2° Quelles sont les fréquences relatives cumulées des foyers ayant un nombre d'enfants égal ou inférieur à n ? Représentation graphique.

3° Quelles sont les fréquences relatives des enfants appartenant à des familles de n enfants ($0 \leqslant n \leqslant 8$) ? Représentation graphique.

4° Quelles sont les fréquences relatives cumulées des enfants appartenant à des familles ayant un nombre d'enfants égal ou inférieur à n ? Représentation graphique.

73. On considère la série statistique suivante :

Quantités (en grammes) de lait entier en poudre absorbées par des bébés de 2 mois en une journée (résultat d'observations portant sur la collectivité de 315 bébés de la pouponnière X...) :

Consommation en grammes	Nombre de bébés
40 à moins 45	8
45 à — 50	11
50 à — 55	31
55 à — 60	61
60 à — 65	54
65 à — 70	58
70 à — 75	43
75 à — 80	25
80 à — 85	17
85 à — 90	7
Total	315

1° Tracer sur un même graphique les deux courbes cumulatives suivantes :

a) nombre d'observations supérieures à ... ;

b) nombre d'observations inférieures à ... ;

2° Donner la définition de la médiane. Calculer la valeur de la médiane de cette série. Contrôler le résultat au moyen du graphique.

3° Calculer, à partir de cette série, la quantité moyenne de lait entier en poudre absorbée par un bébé de 2 mois.

74. L'observation des prix d'un article en divers points de vente (815) donne les résultats indiqués dans le tableau :

Classe de prix en francs	Nombre de points de vente
655-665	4
665-675	9
675-685	31
685-695	75
695-705	183
705-715	204
715-725	157
725-735	97
735-745	40
745-755	12
755-765	3
	815

1° Calculer la moyenne m de l'écart-type σ de ces prix.

2° Quels pourcentages du nombre total d'observations se situent dans les intervalles suivants :

$$(m - \sigma, \quad m + \sigma) \qquad (m - 2\sigma, \quad m + 2\sigma)?$$

On procédera par interpolation linéaire dans les classes contenant les limites de ces intervalles.

75. Une région agricole est divisée en lots cultivables à peu près carrés, dont les côtés forment la progression arithmétique suivante :

$$a, \quad a + r, \quad a + 2r, \quad a + 3r, \dots a + (n - 1)r.$$

On veut caractériser l'ensemble de ces lots par une valeur typique : moyenne ou médiane.

On évalue le lot-type en prenant :

1° La moyenne des côtés;

2° La moyenne des surfaces;

3° La médiane des côtés;

4° La médiane des surfaces.

Calculer chacune de ces valeurs-types.

Montrer que les deux premières moyennes ne sont pas équivalentes. Quelle est la plus grande? (On comparera la surface du carré moyen dans le premier cas et celle du carré moyen dans le second cas.)

Montrer que les valeurs médianes sont équivalentes dans le 3e et le 4e cas.

Quelle valeur typique choisira-t-on?

On répondra à toutes les questions en prenant d'abord $n = 3$ puis n quelconque.

(*Baccalauréat*).

76. A) Soit la suite des n premiers nombres entiers :

1° Déterminer la moyenne arithmétique des nombres de cette suite;

2° Sachant que la somme des carrés des n premiers nombres entiers est : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, démontrer que la variance, ou fluctuation, de ces nombres est $\frac{1}{12}(n^2 - 1)$.

B) Soit la suite des n premiers nombres impairs :

1° Quelle est l'expression du $n^{\text{ième}}$ nombre ?

2° Déterminer la moyenne arithmétique des nombres de cette suite;

3° Déterminer la variance ou fluctuation des nombres de cette suite. (*Baccalauréat*).

77. Le plan rapporté à des axes rectangulaires, Ox, Oy, on considère les points dont les coordonnées, x_i et y_i, sont indiqués ci-dessous :

$(x_1 = 1, y_1 = 19)$; $(x_2 = 2, y_2 = 12)$; $(x_3 = 3, y_3 = 7)$;
$(x_4 = 4, y_4 = 4)$; $(x_5 = 5, y_5 = 4)$; $(x_6 = 7, y_6 = 3)$.

1° Construire ces points; on obtient ce que nous appellerons le diagramme I. Dire pourquoi ce diagramme suggère de poser $X_i = \frac{1}{x_i}$. Construire les points de coordonnées X_i et y_i (diagramme II; dans le calcul de X_i on ne conservera que deux décimales).

2° On considère la quantité $$A = \sum_i (y_i - b X_i)^2,$$

où b est un paramètre inconnu. Déterminer b pour que A soit minimal. On fera le calcul de b dans le cas général où les X_i et y_i ne sont pas précisés. Pour l'application numérique, les calculs seront présentés, aussi clairement que possible, sous forme de tableau.

3° Construire sur le diagramme I la courbe qui lui a été ajustée par ce procédé.

4° Indiquer, sans calcul, un autre changement de variables permettant de se ramener à un ajustement linéaire.

78. Dans une entreprise suisse des essais techniques ont fourni les résultats suivants :

x	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
y	174	218	263	309	356	404	453	503	554	605	658	711	766	821	877	934

1° Représenter graphiquement la correspondance $x \longrightarrow y$.

2° Nous admettons comme valable un ajustement linéaire. Critiquez cette hypothèse.

3° Rechercher par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite d'ajustement.

La disposition des données suggère (sans l'imposer) une présentation des calculs qui peut les alléger en considérant simultanément les valeurs de x symétriques par rapport à leur moyenne.

TABLES NUMÉRIQUES

TABLE DE LOGARITHMES A 4 DÉCIMALES
(de 100 à 549)

	43	42	41	40
0,1	4,3	4,2	4,1	4
0,2	8,6	8,4	8,2	8
0,3	12,9	12,6	12,3	12
0,4	17,2	16,8	16,4	16
0,5	21,5	21,0	20,5	20
0,6	25,8	25,2	24,6	24
0,7	30,1	29,4	28,7	28
0,8	34,4	33,6	32,8	32
0,9	38,7	37,8	36,9	36

	39	38	37	36
0,1	3,9	3,8	3,7	3,6
0,2	7,8	7,6	7,4	7,2
0,3	11,7	11,4	11,1	10,8
0,4	15,6	15,2	14,8	14,4
0,5	19,5	19,0	18,5	18,0
0,6	23,4	22,8	22,2	21,6
0,7	27,3	26,6	25,9	25,2
0,8	31,2	30,4	29,6	28,8
0,9	35,1	34,2	33,3	32,4

	35	34	33	32
0,1	3,5	3,4	3,3	3,2
0,2	7,0	6,8	6,6	6,4
0,3	10,5	10,2	9,9	9,6
0,4	14,0	13,6	13,2	12,8
0,5	17,5	17,0	16,5	16,0
0,6	21,0	20,4	19,8	19,2
0,7	24,5	23,8	23,1	22,4
0,8	28,0	27,2	26,4	25,6
0,9	31,5	30,6	29,7	28,8

	31	30	29	28
0,1	3,1	3	2,9	2,8
0,2	6,2	6	5,8	5,6
0,3	9,3	9	8,7	8,4
0,4	12,4	12	11,6	11,2
0,5	15,5	15	14,5	14,0
0,6	18,6	18	17,4	16,8
0,7	21,7	21	20,3	19,6
0,8	24,8	24	23,2	22,4
0,9	27,9	27	26,1	25,2

	27	26	25	24
0,1	2,7	2,6	2,5	2,4
0,2	5,4	5,2	5,0	4,8
0,3	8,1	7,8	7,5	7,2
0,4	10,8	10,4	10,0	9,6
0,5	13,5	13,0	12,5	12,0
0,6	16,2	15,6	15,0	14,4
0,7	18,9	18,2	17,5	16,8
0,8	21,6	20,8	20,0	19,2
0,9	24,3	23,4	22,5	21,6

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	2502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3686	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4814	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	8785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

NOMBRES USUELS

Nombres	Logarithmes	Nombres	Logarithmes
π = 3,14 159	0,49 715	2	0,30 103
$1/\pi$ = 0,31 831	$\bar{1}$,50 285	3	0,47 712
e = 2,71 828	0,43 429	$\sqrt{2}$ = 1,41 421	0,15 051
$1/e$ = 0,36 788	$\bar{1}$,56 571	$\sqrt{3}$ = 1,73 205	0,23 856
g = 9,80 943	0,99 164	$\sqrt{5}$ = 2,23 607	0,34 949

TABLE DE LOGARITHMES A 4 DÉCIMALES
(de 550 à 1000)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	9069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	9209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

	23	22	21	20
0,1	2,3	2,2	2,1	2
0,2	4,6	4,4	4,2	4
0,3	6,9	6,6	6,3	6
0,4	9,2	8,8	8,4	8
0,5	11,5	11,0	10,5	10
0,6	13,8	13,2	12,6	12
0,7	16,1	15,4	14,7	14
0,8	18,4	17,6	16,8	16
0,9	20,7	19,8	18,9	18

	19	18	17	16
0,1	1,9	1,8	1,7	1,6
0,2	3,8	3,6	3,4	3,2
0,3	5,7	5,4	5,1	4,8
0,4	7,6	7,2	6,8	6,4
0,5	9,5	9,0	8,5	8,0
0,6	11,4	10,8	10,2	9,6
0,7	13,3	12,6	11,9	11,2
0,8	15,2	14,4	13,6	12,8
0,9	17,1	16,2	15,3	14,4

	15	14	13	12
0,1	1,5	1,4	1,3	1,2
0,2	3,0	2,8	2,6	2,4
0,3	4,5	4,2	3,9	3,6
0,4	6,0	5,6	5,2	4,8
0,5	7,5	7,0	6,5	6,0
0,6	9,0	8,4	7,8	7,2
0,7	10,5	9,8	9,1	8,4
0,8	12,0	11,2	10,4	9,6
0,9	13,5	12,6	11,7	10,8

	11	10	9	8
0,1	1,1	1	0,9	0,8
0,2	2,2	2	1,8	1,6
0,3	3,3	3	2,7	2,4
0,4	4,4	4	3,6	3,2
0,5	5,5	5	4,5	4,0
0,6	6,6	6	5,4	4,8
0,7	7,7	7	6,3	5,6
0,8	8,8	8	7,2	6,4
0,9	9,9	9	8,1	7,2

	7	6	5	4
0,1	0,7	0,6	0,5	0,4
0,2	1,4	1,2	1,0	0,8
0,3	2,1	1,8	1,5	1,2
0,4	2,8	2,4	2,0	1,6
0,5	3,5	3,0	2,5	2,0
0,6	4,2	3,6	3,0	2,4
0,7	4,9	4,2	3,5	2,8
0,8	5,6	4,8	4,0	3,2
0,9	6,3	5,4	4,5	3,6

LOGARITHMES DE $(1 + r)$ (calcul des intérêts composés)

Taux %	$1 + r$	$\log(1 + r)$	Taux %	$1 + r$	$\log(1 + r)$
2,50	1,025	0,010 7239	5	1,05	0,021 1893
3	1,03	0,012 8372	5,50	0,055	0,023 2525
3,50	1,035	0,014 9403	6	1,06	0,025 3059
4	1,04	0,017 0333	6,50	1,065	0,027 3496
4,50	1,045	0,019 1163	7	1,07	0,029 3838

Rapports trigonométriques naturels de DEGRÉ en DEGRÉ

Deg.	Radians	Sin.	$\frac{1}{\text{Sin.}}$	Tang.	Cotg.	$\frac{1}{\text{Cos.}}$	Cos.		
0	0,0000	0,0000	infini	0,0000	infini	1,000	1,0000	1,5708*	90
1	0,0175*	0,0175*	57,30*	0,0175*	57,29*	1,000	0,9998	1,5533	89
2	0,0349	0,0349*	28,65	0,0349	28,64*	1,001*	0,9994*	1,5359*	88
3	0,0524*	0,0523	19,11*	0,0524	19,08	1,001	0,9986	1,5184	87
4	0,0698	0,0698*	14,34*	0,0699	14,30	1,002	0,9976*	1,5010*	86
5	0,0873*	0,0872*	11,47	0,0875*	11,43	1,004*	0,9962*	1,4835	85
6	0,1047	0,1045	9,567*	0,1051	9,514	1,000*	0,9945	1,4661*	84
7	0,1222*	0,1219*	8,206*	0,1228*	8,144	1,008*	0,9925	1,4486	83
8	0,1396	0,1392*	7,185	0,1405	7,115	1,010*	0,9903*	1,4312*	82
9	0,1571*	0,1564	6,392	0,1584*	6,314*	1,012	0,9877*	1,4137	81
10	0,1745	0,1736	5,759*	0,1763	5,671	1,015	0,9848	1,3963*	80
11	0,1920*	0,1908	5,241*	0,1944*	5,145*	1,019*	0,9816	1.3788	79
12	0,2094	0,2079	4,810*	0,2126*	4,705*	1,022	0,9781	1,3614*	78
13	0,2269*	0,2250*	4,445	0,2309*	4,331	1,026	0,9744*	1,3439	77
14	0,2443	0,2419	4,134*	0,2493	4,011*	1,031*	0,9703*	1,3265*	76
15	0,2618*	0,2588	3,864*	0,2679	3,732	1,035	0,9659	1,3090*	75
16	0,2793*	0,2756	3,628*	0,2867	3,487	1,040	0,9613*	1,2915	74
17	0,2967	0,2924*	3,420	0,3057	3,271*	1,046*	0,9563	1,2741*	73
18	0,3142*	0,3090	3,236	0,3249	3,078*	1,051	0,9511*	1,2566	72
19	0,3316	0,3256*	3,072*	0,3443	2,904	1,058*	0,9455	1,2392*	71
20	0,3491*	0,3420	2,924*	0,3640*	2,747	1,064	0,9397*	1,2217	70
21	0,3665	0,3584*	2,790	0,3839*	2,605	1,071	0,9336*	1,2043*	69
22	0,3840*	0,3746	2,669	0,4040	2,475	1,079*	0,9272*	1,1868	68
23	0,4014	0,3907	2,559	0,4245*	2,356*	1,086	0,9205	1,1694*	67
24	0,4189*	0,4067	2,459*	0,4452	2,246	1,095*	0,9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	2,366	0,4663	2,145*	1,103	0,9063	1,1345*	65
26	0,4538*	0,4384*	2,281	0,4877	2,050	1,113*	0,8988*	1,1170	64
27	0,4712	0,4540*	2,203*	0,5095	1,963*	1,122	0,8910	1,0996*	63
28	0,4887*	0,4695*	2,130	0,5317	1,881*	1,133*	0,8829	1,0821	62
29	0,5061	0,4848	2,063*	0,5543	1,804	1,143	0,8746	1,0647*	61
30	0,5236*	0,5000	2,000	0,5774*	1,732	1,155*	0,8660	1,0472*	60
31	0,5411*	0,5150	1 942*	0,6009*	1,664	1,167*	0,8572*	1,0297	59
32	0,5585	0,5299	1,887	0,6249*	1,600	1,179	0,8480	1,0123*	58
33	0,5760*	0,5446	1,836	0,6494	1,540*	1,192	0,8387*	0,9948	57
34	0,5934	0,5592*	1,788	0,6745	1,483*	1,206	0,8290	0,9774*	56
35	0,6109*	0,5736*	1,743	0,7002	1,428	1,221*	0,8192*	0,9599	55
36	0,6283	0,5878*	1,701	0,7265	1,376	1,236	0,8090	0,9425*	54
37	0,6458*	0,6018	1,662*	0,7536*	1,327	1,252	0,7986	0,9250	53
38	0,6632	0,6157*	1,624	0,7813*	1,280*	1,269	0,7880	0,9076*	52
39	0,6807*	0,6293	1,589	0,8098*	1,235*	1,287*	0,7771	0,8901	51
40	0,6981	0,6428*	1,556*	0,8391*	1,192*	1,305	0,7660	0,8727*	50
41	0,7156*	0,6561*	1,524	0,8693*	1,150	1,325	0,7547	0,8552	49
42	0,7330	0,6691	1,494	0,9004	1,111*	1,346*	0,7431	0,8378*	48
43	0,7505*	0,6820*	1,466	0,9325	1,072	1,367	0,7314*	0,8203	47
44	0,7679	0,6947*	1,440*	0,9657*	1,036*	1,390	0,7193	0,8029*	46
45	0,7854*	0,7071	1,414	1,0000	1,000	1,414	0,7071	0,7854*	45
		Cos.	$\frac{1}{\text{Cos.}}$	Cotg.	Tang.	$\frac{1}{\text{Sin.}}$	Sin.	Radians	Deg.

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

Rapports trigonométriques naturels de GRADE en GRADE

Grad.	Radians	Sin.	$\frac{1}{\text{Sin.}}$	Tang.	Cotg.	$\frac{1}{\text{Cos.}}$	Cos.		
0	0,000	0,0000	infini	0,0000	infini.	1,000	1,0000	1,571*	100
1	0,016*	0,0157	63,66	0,0157	63,66*	1,000	0,9999*	1,555	99
2	0,031	0,0314	31,84*	0,0314	31,82	1,000	0,9995	1,539	98
3	0,047	0,0471	21,23*	0,0472*	21,20	1,001	0,9989*	1,524*	97
4	0,063*	0,0628*	15,93*	0,0629	15,89	1,002*	0,9980	1,508*	96
5	0,079*	0,0785*	12,75*	0,0787	12,71*	1,003	0,9969*	1,492	95
6	0,094	0,0941	10,63*	0,0945	10,58*	1,004	0,9956*	1,477*	94
7	0,110*	0,1097	9,113*	0,1104	9,058*	1,006	0,9940*	1,461*	93
8	0,126*	0,1253	7,979*	0,1263	7,916*	1,008*	0,9921	1,445	92
9	0,141	0,1409	7,097	0,1423	7,026	1,010	0,9900	1,429	91
10	0,157	0,1564	6,392	0,1584*	6,314*	1,012	0,9877*	1,414*	90
11	0,173*	0,1719	5,816	0,1745	5,730*	1,015	0,9851	1,398	89
12	0,188	0,1874*	5,337*	0,1908*	5,242	1,018	0,9823*	1,382	88
13	0,204	0,2028*	4,931	0,2071*	4,829*	1,021	0,9792	1,367*	87
14	0,220*	0,2181	4,584	0,2235	4,474*	1,025*	0,9759	1,351*	86
15	0,236*	0,2334	4,284*	0,2401*	4,165	1,028	0,9724*	1,335	85
16	0,251	0,2487*	4,021	0,2568*	3,895*	1,032	0,9686*	1,319	84
17	0,267	0,2639*	3,790*	0,2736*	3,655	1,037*	0,9646*	1,304*	83
18	0,283*	0,2790*	3,584	0,2905	3,442	1,041	0,9603*	1,288	82
19	0,298	0,2940	3,401*	0,3076	3,251*	1,046	0,9558*	1,272	81
20	0,314	0,3090	3,236	0,3249	3,078*	1,051	0,9511*	1,257*	80
21	0,330*	0,3239	3,087	0,3424*	2,921*	1,057*	0,9461*	1,241*	79
22	0,346*	0,3387	2,952	0,3600	2,778*	1,063*	0,9409*	1,225	78
23	0,361	0,3535*	2,829	0,3779*	2,646	1,069	0,9354	1,210*	77
24	0,377*	0,3681	2,716	0,3959	2,526*	1,076*	0,9298*	1,194*	76
25	0,393*	0,3827*	2,613	0,4142	2,414	1,082	0,9239*	1,178	75
26	0,408	0,3971	2,518*	0,4327	2,311*	1,090*	0,9178*	1,162	74
27	0,424	0,4115	2,430	0,4515	2,215*	1,097	0,9114	1,147*	73
28	0,440*	0,4258*	2,349*	0,4706*	2,125	1,105	0,9048	1,131*	72
29	0,456*	0,4399	2,273	0,4899*	2,041	1,114*	0,8980	1,115	71
30	0,471	0,4540*	2,203*	0,5095	1,963*	1,122	0,8910	1,100*	70
31	0,487*	0,4679	2,137	0,5295*	1,889*	1,132*	0,8838*	1,084*	69
32	0,503*	0,4818*	2,076*	0,5498*	1,819*	1,141	0,8763	1,068	68
33	0,518	0,4955*	2,018	0,5704*	1,753	1,151	0,8686	1,052	67
34	0,534	0,5090	1,964	0,5914*	1,691*	1,162*	0,8607	1,037*	66
35	0,550*	0,5225*	1,914*	0,6128	1,632*	1,173*	0,8526	1,021	65
36	0,565	0,5358	1,866	0,6346	1,576*	1,184	0,8443	1,005	64
37	0,581	0,5490	1,821	0,6569*	1,522	1,196	0,8358	0,990*	63
38	0,597*	0,5621*	1,779	0,6796*	1,471	1,209	0,8271*	0,974*	62
39	0,613*	0,5750	1,739	0,7028	1,423*	1,222	0,8181	0,958	61
40	0,628	0,5878*	1,701	0,7265	1,376	1,236	0,8090	0,942	60
41	0,644	0,6004	1,666*	0,7508	1,332*	1,250	0,7997*	0,927*	59
42	0,660*	0,6129	1,632*	0,7757*	1,289	1,266*	0,7902	0,911	58
43	0,675	0,6252	1,599	0,8012*	1,248	1,281	0,7804	0,895	57
44	0,691	0,6374	1,569*	0,8273*	1,209*	1,298*	0,7705	0,880*	56
45	0,707*	0,6494	1,540*	0,8541*	1,171*	1,315	0,7604	0,864*	55
46	0,723*	0,6613	1,512	0,8816	1,134	1,333	0,7501	0,848	54
47	0,738	0,6730	1,486*	0,9099	1,099*	1,352	0,7396	0,833*	53
48	0,754*	0,6845	1,461*	0,9391*	1,065*	1,372*	0,7290*	0,817*	52
49	0,770*	0,6959	1,437*	0,9691*	1,032*	1,393*	0,7181	0,801	51
50	0,785	0,7071	1,414	1,0000	1,000	1,414	0,7071	0,785	50
		Cos.	$\frac{1}{\text{Cos.}}$	Cotg.	Tang.	$\frac{1}{\text{Sin.}}$	Sin.	Radians	Grad.

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

Table des valeurs de $(1 + r)^n$ pour les taux usuels

Valeurs de n	1,03	1,04	1,045	1,05	1,06
1	1,03	1,04	1,045	1,05	1,06
2	1,060 900	1,081 600	1,092 025	1,102 500	1,123 600
3	1,092 727	1,124 864	1,141 166	1,157 625	1,191 016
4	1,125 509	1,169 859	1,192 519	1,215 506	1,262 477
5	1,159 274	1,216 653	1,246 182	1,276 282	1,338 226
6	1,194 052	1,265 319	1,302 260	1,340 096	1,418 519
7	1,229 874	1,315 931	1,360 862	1,407 100	1,503 630
8	1,266 770	1,368 569	1,422 101	1,477 455	1,593 848
9	1,304 773	1,423 312	1,486 095	1,551 328	1,689 479
10	1,343 916	1,480 244	1,552 969	1,628 895	1,790 848
11	1,384 234	1,539 454	1,622 853	1,710 339	1,898 299
12	1,425 761	1,601 032	1,695 881	1,795 856	2,012 196
13	1,468 534	1,665 074	1,772 196	1,885 649	2,132 928
14	1,512 590	1,731 676	1,851 945	1,979 932	2,260 904
15	1,557 967	1,800 944	1,935 282	2,078 928	2,396 558
16	1,604 706	1,872 981	2,022 370	2,182 875	2,540 352
17	1,652 848	1,947 900	2,113 377	2,292 018	2,692 773
18	1,702 433	2,025 817	2,208 479	2,406 619	2,854 339
19	1,753 506	2,106 849	2,307 860	2,526 950	3,025 600
20	1,806 111	2,191 123	2,411 714	2,653 298	3,207 135
21	1,860 295	2,278 768	2,520 241	2,785 963	3,399 564
22	1,916 103	2,369 919	2,633 652	2,925 261	3,603 537
23	1,973 587	2,464 716	2,752 166	3,071 524	3,819 750
24	2,032 794	2,563 304	2,876 013	3,225 100	4,048 935
25	2,093 778	2,665 836	3,005 434	3,386 355	4,291 871
26	2,156 591	2,772 470	3,140 679	3,555 673	4,549 383
27	2,221 289	2,883 369	3,282 010	3,733 456	4,822 346
28	2,287 928	2,998 703	3,429 700	3,920 129	5,111 687
29	2,356 566	3,118 651	3,584 036	4,116 136	5,418 388
30	2,427 262	3,243 398	3,745 318	4,321 942	5,743 491
31	2,500 080	3,373 133	3,913 857	4,538 039	6,088 101
32	2,575 083	3,508 059	4,089 981	4,764 941	6,453 387
33	2,652 335	3,648 381	4,274 030	5,003 189	6,840 590
34	2,731 905	3,794 316	4,466 362	5,253 348	7,251 025
35	2,813 862	3,946 089	4,667 348	5,516 015	7,686 087
36	2,898 278	4,103 933	4,877 378	5,791 816	8,147 252
37	2,985 227	4,268 090	5,096 860	6,081 407	8,636 087
38	3,074 783	4,438 813	5,326 219	6,385 477	9,154 252
39	3,167 027	4,616 366	5,565 899	6,704 751	9,703 507
40	3,262 038	4,801 021	5,816 365	7,039 989	10,285 718
41	3,359 899	4,993 061	6,078 101	7,391 988	10,902 861
42	3,460 696	5,192 784	6,351 615	7,761 588	11,557 033
43	3,564 517	5,400 495	6,637 438	8,149 667	12,250 455
44	3,671 452	5,616 515	6,936 123	8,557 150	12,985 482
45	3,781 596	5,841 176	7,248 248	8,985 008	13,764 611
46	3,895 044	6,074 823	7,574 420	9,434 258	14,590 487
47	4,011 895	6,317 816	7,915 268	9,905 971	15,465 917
48	4,132 252	6,570 528	8,271 456	10,401 270	16,393 872
49	4,256 219	6,833 349	8,643 671	10,921 333	17,377 504
50	4,383 906	7,106 683	9,032 636	11,467 400	18,420 154

Table des valeurs de : $(1 + r).\dfrac{(1 + r)^n - 1}{r}$

pour les taux usuels

Valeurs de *n*	1,03	1,04	1,045	1,05	1,06
1	1,03	1,04	1,045	1,05	1,06
2	2,09 090	2,12 160	2,13 702	2,15 250	2,18 360
3	3,18 363	3,24 646	3,27 819	3,31 012	3,37 462
4	4,30 914	4,41 632	4,47 071	4,52 563	4,63 709
5	5,46 841	5,63 298	5,71 689	5,80 191	5,97 532
6	6,66 246	6,89 829	7,01 915	7,14 201	7,39 384
7	7,89 234	8,21 423	8,38 001	8,54 911	8,89 747
8	9,15 911	9,58 280	9,80 211	10,02 656	10,49 132
9	10,46 388	11,00 611	11,28 821	11,57 789	12,18 079
10	11,80 780	12,48 635	12,84 118	13,20 679	13,97 164
11	13,19 203	14,02 581	14,46 403	14,91 713	15,86 994
12	14,61 779	15,62 684	16,15 991	16,71 298	17,88 214
13	16,08 632	17,29 191	17,93 211	18,59 863	20,01 507
14	17,59 891	19,02 359	19,78 405	20,57 856	22,27 597
15	19,15 688	20,82 453	21,71 934	22,65 749	24,67 253
16	20,76 159	22,69 751	23,74 171	24,84 037	27,21 288
17	22,41 443	24,64 541	25,85 508	27,13 238	29,90 565
18	24,11 687	26,67 123	28,06 356	29,53 900	32,75 999
19	25,87 037	28,77 808	30,37 142	32,06 595	35,78 559
20	27,67 649	30,96 920	32,78 314	34,71 925	38,99 273
21	29,53 678	33,24 797	35,30 338	37,50 521	42,39 229
22	31,45 288	35,61 789	37,93 703	40,43 048	45,99 583
23	33,42 647	38,08 260	40,68 920	43,50 200	49,81 558
24	35,45 926	40,64 591	43,56 521	46,72 710	53,86 451
25	37,55 304	43,31 174	46,57 064	50,11 345	58,15 638
26	39,70 963	46,08 421	49,71 132	53,66 913	62,70 577
27	41,93 092	48,96 758	52,99 333	57,40 258	67,52 811
28	44,21 885	51,96 629	56,42 303	61,32 271	72,63 980
29	46,57 542	55,08 494	60,00 707	65,43 885	78,05 819
30	49,00 268	58,32 834	63,75 239	69,76 079	83,80 168
31	51,50 276	61,70 147	67,66 625	74,29 883	89,88 978
32	54,07 784	65,20 953	71,75 623	79,06 377	96,34 316
33	56,73 018	68,85 791	76,03 026	84,96 696	103,18 375
34	59,46 208	72,65 222	80,49 662	89,32 031	110,43 478
35	62,27 594	76,59 831	85,16 397	94,03 632	118,12 087
36	65,17 422	80,70 225	90,04 134	100,62 814	126,26 812
37	68,15 945	84,97 034	95,13 820	106,70 955	134,90 421
38	71,23 423	89,40 915	100,46 442	113,09 502	144,05 846
39	74,40 126	94,02 552	106,03 032	119,79 977	153,76 197
40	77,66 330	98,82 654	111,84 669	126,83 976	164,04 768
41	81,02 320	103,81 960	117,92 479	134,23 175	174,95 054
42	84,48 389	109,01 238	124,27 640	141,99 334	186,50 758
43	88,04 841	114,41 288	130,91 384	150,14 301	198,75 803
44	91,71 986	120,02 939	137,84 997	158,70 016	211,74 351
45	95,50 146	125,87 057	145,09 821	167,68 516	225,50 812
46	99,39 650	131,94 539	152,67 263	177,11 942	240,09 861
47	103,40 840	138,26 321	160,58 790	187,02 539	255,56 453
48	107,54 065	144,83 373	168,85 936	197,42 666	271,95 840
49	111,79 687	151,66 708	177,50 303	208,34 800	289,33 590
50	116,18 077	158,77 377	186,53 566	219,81 540	300,75 606

Carrés, cubes, inverses, racines carrées et cubiques des cent premiers nombres.

n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1	1	1	**51**	2 601	132 651	0,0196	7,141	3,708
2	4	8	0,5000	1,414	1,260*	**52**	2 704	140 608	0,0192	7,211	3,733*
3	9	27	0,3333	1,732	1,442	**53**	2 809	148 877	0,0189*	7,280	3,756
4	16	64	0,2500	2,000	1,587	**54**	2 916	157 464	0,0185	7,348	3,780*
5	25	125	0,2000	2,236	1,710*	**55**	3 025	166 375	0,0182*	7,416	3,803*
6	36	216	0,1667*	2,449	1,817	**56**	3 136	175 616	0,0179*	7,483	3,826*
7	49	343	0,1429*	2,646*	1,913*	**57**	3 249	185 193	0,0175	7,550*	3,849*
8	64	512	0,1250	2,828	2,000	**58**	3 364	195 112	0,0172	7,616*	3,871*
9	81	729	0,1111	3,000	2,080	**59**	3 481	205 379	0,0169	7,681	3,893
10	100	1 000	0,1000	3,162	2,154	**60**	3 600	216 000	0,0167*	7,746*	3,915*
11	121	1 331	0,0909	3,317*	2,224*	**61**	3 721	226 981	0,0164*	7,810	3,936
12	144	1 728	0,0833	3,464	2,289	**62**	3 844	238 328	0,0161	7,874	3,958*
13	169	2 197	0,0769	3,606*	2,351	**63**	3 969	250 047	0,0159*	7,937	3,979
14	196	2 744	0,0714	3,742*	2,410	**64**	4 096	262 044	0,0156	8,000	4,000
15	225	3 375	0,0667*	3,873*	2,466	**65**	4 225	274 425	0,0154*	8,062	4,021*
16	256	4 096	0,0625	4,000	2,520*	**66**	4 356	287 496	0,0152*	8,124	4,041
17	289	4 913	0,0588	4,123	2,571	**67**	4 489	300 763	0,0149	8,185	4,062*
18	324	5 832	0,0556*	4,243*	2,621*	**68**	4 624	314 432	0,0147	8,246	4,082*
19	361	6 859	0,0526	4,359*	2,668	**69**	4 761	328 509	0,0145*	8,307*	4,102*
20	400	8 000	0,0500	4,472	2,714	**70**	4 900	343 000	0,0143*	8,367*	4,121
21	441	9 261	0,0476	4,583*	2,759*	**71**	5 041	357 911	0,0141*	8,426	4,141*
22	484	10 648	0,0455*	4,690	2,802	**72**	5 184	373 248	0,0139*	8,485	4,160
23	529	12 167	0,0435*	4,796*	2,844*	**73**	5 329	389 017	0,0137*	8,544	4,179
24	576	13 824	0,0417*	4,899*	2,885*	**74**	5 476	405 224	0,0135	8,602	4,198
25	625	15 625	0,0400	5,000	2,924	**75**	5 625	421 875	0,0133	8,660	4,217
26	676	17 576	0,0385*	5,099	2,962	**76**	5 776	438 976	0,0132*	8,718*	4,236*
27	729	19 683	0,0370	5,196	3,000	**77**	5 929	456 533	0,0130*	8,775*	4,254
28	784	21 952	0,0357	5,292*	3,037*	**78**	6 084	474 552	0,0128	7,832*	4,273*
29	841	24 389	0,0345*	5,385	3,072	**79**	6 241	493 039	0,0127*	8,888	4,291*
30	900	27 000	0,0333	5,477	3,107	**80**	6 400	512 000	0,0125	8,944	4,309*
31	961	29 791	0,0323*	5,568*	3,141	**81**	6 561	531 441	0,0123	9,000	4,327*
32	1 024	32 768	0,0313*	5,657*	3,175*	**82**	6 724	551 368	0,0122*	9,055	4,344
33	1 089	35 937	0,0303	5,745*	3,208*	**83**	6 889	571 787	0,0120	9,110	4,362
34	1 156	39 304	0,0294	5,831*	3,240*	**84**	7 056	592 704	0,0119	9,165	4,380*
35	1 225	42 875	0,0286*	5,916	3,271	**85**	7 225	614 125	0,0118*	9,220*	4,397*
36	1 296	46 656	0,0278*	6,000	3,302*	**86**	7 396	636 056	0,0116	9,274*	4,414
37	1 369	50 653	0,0270	6,083*	3,332	**87**	7 569	658 503	0,0115*	9,327	4,431
38	1 444	54 872	0,0263	6,164	3,362*	**88**	7 744	681 472	0,0114*	9,381*	4,448*
39	1 521	59 319	0,0256	6,245*	3,391	**89**	7 921	704 969	0,0112	9,434*	4,465*
40	1 600	64 000	0,0250	6,325*	3,420*	**90**	8 100	729 000	0,0111	9,487*	4,481
41	1 681	68 921	0,0244*	6,403	3,448	**91**	8 281	753 571	0,0110*	9,539	4,498*
42	1 764	74 088	0,0238	6,481*	3,476	**92**	8 464	778 688	0,0109*	9,592*	4,514
43	1 849	79 507	0,0233*	6,557	3,503	**93**	8 649	804 357	0,0108*	9,644	4,531*
44	1 936	85 184	0,0227	6,633	3,530	**94**	8 836	830 584	0,0106	9,695	4,547*
45	2 025	91 125	0,0222	6,708	3,557*	**95**	9 025	857 375	0,0105	9,747*	4,563*
46	2 116	97 336	0,0217	6,782	3,583	**96**	9 216	884 736	0,0104	9,798*	4,579*
47	2 209	103 823	0,0213*	6,856*	3,609*	**97**	9 409	912 673	0,0103	9,849*	4,595*
48	2 304	110 592	0,0208	6,928	3,634	**98**	9 604	941 192	0,0102	8,899	4,610
49	2 401	117 649	0,0204	7,000	3,659	**99**	9 801	970 299	0,0101	9,950*	4,626
50	2 500	125 000	0,0200	7,071	3,684	**100**	10 000	1 000 000	0,0100	10,000	4,642*

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

TABLE DES MATIÈRES

ALGÈBRE ET NOTIONS D'ANALYSE

STATISTIQUE

Imprimé en France
IMPRIMERIE FIRMIN-DIDOT. - PARIS - MESNIL - IVRY - 169
Dépôt légal : 1er trimestre 1968.
N° d'Éditeur : C 12240 - IV (AL. b. SB 4).

